

Loeng 3/4:

Lainete matemaatiline kirjeldus II

Koduste ülesannete lahendus

Soomere 2010

EMH0090 Rannikuprotsessid

Kodused ülesanded:

(Eeldada, et tegemist on siinuslainetega ja perfektseilt sileda merepõhjaga)

- Laine kõrgus on 1 m ja periood 5 s. Leida keskmine põhjalähedane kiirus 10 m sügavuses meres.
- Hoovusemõõtja registreeris 5 m sügavusel merepõhjas vee maksimaalseks kiiruseks 10 cm/s. Lainete periood oli 4 sekundit. Leida laine kõrgus
- Sügavas vees on laine periood 5 sekundit. Millisel sügavusel on veesakeste kiirus 50% pinnal paiknevate veesakeste kiirusest?
- Sügavas meres levivad kõrvuti kaks lainet, mõlemad 1 meetri kõrgused, kuid laine 1 on kaks korda järsem kui laine 2. Kumba laine harjad liiguvad kiiremini?

Soomere 2010

EMH0090 Rannikuprotsessid

Laine poolt tekitatud maksimaalne põhjalähedane kiirus

Lõpliku sügavusega meri

$$V(z) = \sqrt{u^2 + w^2} = \frac{agk}{\omega \cosh kH} \times \sqrt{\cos^2(kx - \omega t) + \sinh^2 k(z + H)}$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$V_{\max}(z = -H) = \frac{agk}{\omega \cosh kH}$$

Veesakeste kiirus laines (ka lõpmata sügavas meres) sügavusel -H: sõltub nii mere sügavusest, lainekõrgusest kui perioodist

$$V = \frac{agk}{\omega e^{kH}} \quad \frac{1}{2}(e^{-kH} + e^{kH})$$

$$V_{\max}(-H) = \frac{a\omega}{\sinh kH}$$

Soomere 2010

EMH0090 Rannikuprotsessid

Laine poolt tekitatud keskmine põhjalähedane kiirus

Lõpliku sügavusega meri

Horizontaalsuunalise liikumise amplituud pinnal = ellipsi pooltelg

$$B_x = a \frac{\cosh k(z + H)}{\sinh kH}$$

Horizontaalsuunalise liikumise amplituud põhjas:

$$B_H = a \frac{\cosh 0}{\sinh kH} = \frac{a}{\sinh kH}$$

Ühe laineperioodi $T = 2\pi/\omega$ jooksul läbitakse vahemaa $l = 4Bh$; seega keskmine kiirus

$$V_{\text{mean}} = \frac{l}{T} = \frac{4a\omega}{2\pi \sinh kH}$$

$$V_{\max}(-H) = \frac{a\omega}{\sinh kH}$$

$$V_{\text{mean}} = \frac{2V_{\max b}}{\pi}$$

Soomere 2010

EMH0090 Rannikuprotsessid

Kodused ülesanded:

- Laine kõrgus on 1 m ja periood 5 s. Leida keskmine põhjalähedane kiirus 10 m sügavuses meres.

$$V_{\text{mean}} = \frac{l}{T} = \frac{4a\omega}{2\pi \sinh kH} = \frac{2a\omega}{\pi \sinh kH} \quad V_{\text{mean}} = \frac{2V_{\max b}}{\pi}$$

$$V_{\max}(z = -H) = \frac{agk}{\omega \cosh kH} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Vajalikud parameetrid:

$$V_{\max}(-H) = \frac{a\omega}{\sinh kH}$$

- ➔ Amplituud (=1/2xkõrgus)
- ➔ Ringsagedus ($2\pi/T$)
- ➔ Vee sügavus (10 m)
- ➔ Laineaer

Soomere 2010

EMH0090 Rannikuprotsessid

Dispersiooniseos IV

$$\omega^2 = g\kappa \frac{\exp(\kappa H) - \exp(-\kappa H)}{\exp(\kappa H) + \exp(-\kappa H)}$$

(realistlik meri) $\omega = \sqrt{g\kappa \tanh(\kappa H)}$

Laine periood sügavas vees on 10 sekundit. Leida laine pikkus ja lainearv (1) sügavas vees, (2) 100 meetri sügavuses vees ja (3) 10 meetri sügavuses vees. Võrrelda tulemusi.

Reaalses meres: transsendentne võrrand

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{g\kappa \tanh \kappa H} \approx 0.628 \quad \kappa H \tanh \kappa H = \frac{1}{g} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 H \approx 0.0402H$$

$$H=10 \rightarrow \kappa H \approx 0.68 \rightarrow \kappa = 0.068, L=92.4\text{m}$$

$$H=100 \rightarrow \kappa H \approx 4.022 \rightarrow \kappa = 0.04022, L=156\text{m}$$

Puudus eelmise loengu slaidil!

Soomere 2010

EMH0090 Rannikuprotsessid

Keerukas moment: lainearvu leidmine

$$V_{mean} = \frac{2a\omega}{\pi \sinh kH}$$

$$T=5s, H=10m$$

$$kH \tanh kH = \frac{1}{g} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 H$$

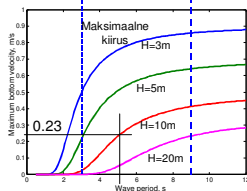
$$kH=1.7172 \quad k=0.17172$$

$$kH \tanh kH = \frac{1}{g} \left(\frac{2\pi}{5} \right)^2 H \approx 0.161H = 1.61$$

$$\sinh(kH)=2.6947$$

$$V_{mean} = \frac{2a\omega}{\pi \sinh kH} = \frac{2a}{\pi \sinh kH} \frac{2\pi}{T} = \frac{4a}{T \sinh kH} = \frac{2h}{T \sinh kH}$$

$$V_{mean} = \frac{2}{5 * 2.6947} = 0.1484 \frac{m}{s}$$



Soomere 2010

EMH0090 Rannik

Kodused ülesanded:

- Hoovusemõõtja registreeris 5 m sügavusel merepõhjas vee maksimaalseks kiiruseks 10 cm/s. Lainete periood oli 4 sekundit. Leida laine kõrgus

$$V_{max}(-H) = \frac{a\omega}{\sinh kH}$$

Vajalikud parameetrid:
 Ringsagedus ($2\pi/T$)
 Vee sügavus (5 m)
 Lainearv

$$kH \tanh kH = \frac{1}{g} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 H \quad T=4s, H=5m$$

$$kH=1.4153 \quad k=0.2831$$

$$kH \tanh kH = \frac{1}{g} \left(\frac{2\pi}{4} \right)^2 H \approx 0.2515H = 1.2576 \quad \sinh(kH)=1.9374$$

$$V_{max} = \frac{a\omega}{\sinh kH} \Rightarrow a = \frac{V_{max} \sinh kH}{\omega} = \frac{TV_{max} \sinh kH}{2\pi} = \frac{4 \times 0.1 \times 1.9374}{6.28} = 0.1233 m$$

Soomere 2010

EMH0090 Rannikuprotsessid

Kodused ülesanded:

- Hoovusemõõtja registreeris 5 m sügavusel merepõhjas vee maksimaalseks kiiruseks 10 cm/s. Lainete periood oli 4 sekundit. Leida laine kõrgus

$$a = \frac{V_{max} \sinh kH}{\omega} = \frac{TV_{max} \sinh kH}{2\pi} = \frac{4 \times 0.1 \times 1.9374}{6.28} = 0.1233 m$$

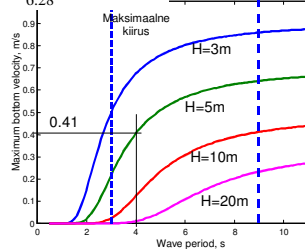
$$h = 2a = 0.2466 m$$

"Kaine mõistuse" kontroll nomogrammilt:

1 m kõrgune laine →

0.41 m/s max. põhjalähedane kiirus

0.1 m/s ~1/4 m kõrgune → 25 cm



Soomere 2010

EMH0090

Kodused ülesanded:

- Sügavas vees on laine periood 5 sekundit. Millisel sügavusel on veesakeste kiirus 50% pinnal paiknevate veesakeste kiirusest?

Kiiruse moodul sügavas vees ($H=\infty$)

$$V(z) = \sqrt{u^2 + w^2} = \frac{agk}{\omega} e^{kz}$$

- Sõltub ainult laine parameetritest ja veesakese asukoha sügavusest

- Kahaneb eksponentsiaalselt sügavuse suurenedes

- Kindla sügavuse jaoks konstantne nii ajas kui ruumis

- Maksimaalne väärtus vee pinnal

$$V_{max} = \frac{agk}{\omega} = \frac{ag}{c_f}$$

Kodused ülesanded:

- Sügavas vees on laine periood 5 sekundit. Millisel sügavusel on veesakeste kiirus 50% pinnal paiknevate veesakeste kiirusest?

$$V(z) = \frac{agk}{\omega} e^{kz} \quad \text{Pinnal: } V(z) = \frac{agk}{\omega} e^{k0} = \frac{agk}{\omega}$$

$$\text{Otsitakse sügavust } z: \quad V(z) = \frac{agk}{\omega} e^{kz} = \frac{1}{2} V(0) = \frac{1}{2} \frac{agk}{\omega}$$

$$e^{kz} = \frac{1}{2} \Rightarrow kz = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \Rightarrow kz = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow z = -\frac{\ln 2}{k}$$

$$\text{Lainearv: dispersiooniseosest } \omega = \sqrt{gk} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = gk \Rightarrow k = \frac{1}{g} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = 0.161$$

$$\text{Otsitav sügavus } z = -\frac{\ln 2}{0.161} = 4.305 m$$

Soomere 2010


EMH0090 Rannikuprotsessid

Kodused ülesanded:

- Sügavas meres levivad kõrvuti kaks lainet, mõlemad 1 meetri kõrgused, kuid laine 1 on kaks korda järsem kui laine 2. Kumba laine harjad liiguvad kiiremini?

Soomere 2010

EMH0090 Rannikuprotsessid



Lainesõnastik

Laine kõrgus - vahemaa laine madalaima/kõrgeima punkti vahel (pinnalaine) amplituud - 1/2 lainekõrgusest
 pikkus - vahemaa kahe järjestikuse laineharja vahel
 periood - ajaintervall kahe järjestikuse laineharja
 sagedus - mingit punkti läbivate laineharjade arv ajaühikus = 1/periood
 kalle (järskus, steepness) = laine kõrgus / laine pikkus
 faasikiirus - laineharjade (samafaasipunktide) leviku kiirus
 rühmakiirus - energia leviku kiirus

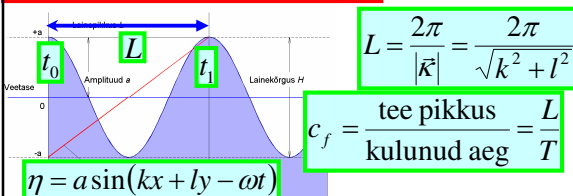
Soomere 2010 EMH0090 Rannikuprotsessid

Kiirus I: liiguvad laineharjad

DEFINITSIOON

FAASIKIIRUS on laineharjade leviku kiirus

$$T = t_1 - t_0 = \frac{2\pi}{\omega}$$



Ülesanne: leida faasikiirused madala ja sügava vee jaoks

$$c_f = \frac{L}{T} = \frac{2\pi/\kappa}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + l^2}}$$

Soomere 2010

EMH0090 Rannikuprotsessid

Kodused ülesanded:

- Sügavas meres levivad kõrvuti kaks lainet, mõlemad 1 meetri kõrgused, kuid laine 1 on kaks korda järsem kui laine 2. Kumba laine harjad liiguvad kiiremini?

Laine 1: amplituud 0.5, pikkus L_1

Laine 2: amplituud 0.5, pikkus L_2

Laine 1 2x järsem: $\frac{a}{L_1} = 2 \frac{a}{L_2}$ $L_2 = 2L_1$

$$c_f = \frac{L}{T} = \frac{2\pi/\kappa}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + l^2}} \quad ?$$

Soomere 2010

EMH0090 Rannikuprotsessid

Harjutus 6: Praktilisi valemeid SÜGAVAS VEEES

$kH > 3$

$H > L/2$

Tegelikud seosed

$$\omega(\bar{\kappa}) = \sqrt{g\bar{\kappa}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad L = \frac{2\pi}{\bar{\kappa}}$$

$$c_f = \sqrt{g/\bar{\kappa}}$$

$$\omega = \sqrt{g\bar{\kappa}} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{g \frac{2\pi}{L}} \Rightarrow L = \frac{gT^2}{2\pi} \approx \left(\frac{T}{0.8}\right)^2$$

kuna $\sqrt{g/(2\pi)} \approx 1.2495 \approx 1/0.8003$ $T \approx 0.8\sqrt{L}$

$$c_f = \sqrt{\frac{g}{\bar{\kappa}}} = \sqrt{\frac{g}{2\pi}} L \approx \frac{\sqrt{L}}{0.8}$$

$$L \approx 1.56T^2 \quad c_f \approx \sqrt{1.56L} = 1.56T$$

Soomere 2010

EMH0090 Rannikuprotsessid

Kodused ülesanded:

- Sügavas meres levivad kõrvuti kaks lainet, mõlemad 1 meetri kõrgused, kuid laine 1 on kaks korda järsem kui laine 2. Kumba laine harjad liiguvad kiiremini?

Laine 1: amplituud 0.5, pikkus L_1

Laine 2: amplituud 0.5, pikkus L_2

Laine 1 2x järsem: $\frac{a}{L_1} = 2 \frac{a}{L_2}$ $L_2 = 2L_1$ 2. Laine pikem

$$c_f = \frac{L}{T} = \frac{2\pi/\bar{\kappa}}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{\bar{\kappa}} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + l^2}} \quad ? \quad c_f = \sqrt{\frac{g}{\bar{\kappa}}} = \sqrt{\frac{g}{2\pi}} L \approx \frac{\sqrt{L}}{0.8}$$

Pikema laine harjad liiguvad kiiremini →

Laine 2 harjad liiguvad kiiremini

Soomere 2010

EMH0090 Rannikuprotsessid