Loeng 3:

Lainete matemaatiline kirjeldus II

(koos harjutustega)

Kordamiseks

Hüdrodünaamika võrrandid

Pinnalainete rajaülesande seade ja lahendamine

Mis on laine?

Meresõnastik: laine - veepinnal või selle piirikihtidel leviv häiritus

Tegelikult üldisem nähtus, mille puhul

I. Mingi signaal liigub keskkonna ühest punktist teise

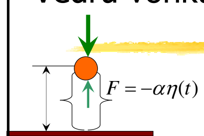
II. Keskkond (materjal) ise oluliselt ei liigu

III. Signaal või häiritus säilitab oma vormi

IV. Tavaliselt liigub signaal või häiritus konstantse kiirusega

Vedru võnkumine

Eeldus: tasakaaluasendist välja viidud kehale mõjuv (tagastav) jõud võrdeline nihke suurusega



$$F = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Newtoni seadus $m\frac{d^2\eta(t)}{dt^2} = -\alpha\eta(t)$

Kirjutatuna veidi teisiti $\frac{d^2\eta(t)}{dt^2} = -\omega^2\eta(t)$ $\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$

(harilik diferentsiaalvõrrand) $\eta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

(või eksponent, kui tagastav jõud teisemärgiline)

A – amplituud

ω - ringsagedus

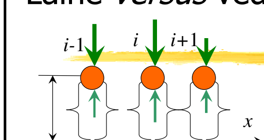
φ - (alg)faas

Laine *versus* vedru

Eeldused:

palju seotud vedrusid;

Igale kehale mõjuv jõud võrdeline suhtelise nihkega naabrite suhtes



$F_i = F_{i1} + F_{i2}$

$F_{i1} = -\alpha\eta_i + \alpha\eta_{i-1}$

$F_{i2} = -\alpha\eta_i + \alpha\eta_{i+1}$

$F = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

$F = -\alpha\eta(t)$

$m\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = F_i = \alpha\eta_{i-1} - 2\alpha\eta_i + \alpha\eta_{i+1}$ diferentsskeem?

Vedrud piisavalt lähestikku → arendus Taylori ritta x järgi →

$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \omega^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$ D'Alembert'i võrrand (teist järku osatuletistega lineaarne diferentsiaalvõrrand)

Üks lahenditest: $\eta(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$ (lainelahend)

NB!! Aga ainult siis, kui $\omega = \pm vk$ (dispersiooniseos)

Seega ei saa kõiki laine parameetreid vabalt valida

Võrrandite tuletamine

- Eeldus: keskkond on pidev
- Massi jäävuse seadus → pidevuse võrrand
- Impulsi (liikumishulga) jäävuse seadus → Cauchy, Euleri või Navier-Stokesi võrrandid (üsna vastikud osatuletistega või integro-diferentsiaalvõrrandid)
- Liikumisvõrrandite kombineerimine sobival moel & tingimustel → esimene integraal
- Tuntuim esimene integraal: Bernoulli võrrand
- Lineaarsete pinnalainete ülesanne

Argumendid ja muutujad

- Kolm ruumi-koordinaati (x,y,z)
- Aeg *t*
- → F(x,y,z,t)

- vee liikumise kiiruse kolm komponenti
- rõhk
- Tihedus =F[soolsus, temperatuur, rõhk]
- peavad olema määratud igas punktis igal ajahetkel

Materiaalne element (veeosake)

- Asub hetkel t mingis punktis [x(t),y(t),z(t)]
- (ja üldiselt liigub!)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = (u_x, u_y, u_z) = (u, v, w)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u_x \quad \frac{\partial y}{\partial t} = u_y \quad \frac{\partial z}{\partial t} = u_z$$

$$u_x = u \quad u_y = v \quad u_z = w$$

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = (u, v, w)$$

- Selle mistahes omadus γ= γ[x(t),y(t),z(t),t]
- (üldiselt muutub nii veeosakese liikumise tõttu ühest punktist teise kui ka muudel põhjustel – näiteks soojenemine)

Materiaalne element (veeosake)

- Seega selle omaduse muutumine ajas on leitav liitfunktsiooni differentseerimise reegli järgi:

(Chain rule)

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial\gamma}{\partial t} + \frac{\partial\gamma}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{u} + \frac{\partial\gamma}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{v} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{w}$$

- nn. täistuletis

$$\frac{D\gamma}{Dt} \overset{def}{=} \frac{\partial\gamma}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\gamma$$

Omaduse muutumine ajas ja osakese liikumisest tingituna

- Nabla-operaator

$$\vec{\nabla}\gamma = \left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}, \frac{\partial\gamma}{\partial y}, \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)$$

Kaks fundamentaalset printsiipi:

(i) massi jäävuse seadus→pidevuse võrrand

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0} \quad \rho(x,y,z,t) = const$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{u} = 0} \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$

(ii) Mitmesuguste jõudude mõju & Newtoni seadus ehk impulsi jäävuse seadus → Cauchy võrrandid → Navier-Stokesi võrrandid → Euleri võrrandid

$$\boxed{\rho\frac{Du_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\Delta u_x}$$

Mere ja atmosfääri paneb liikuma välisjõud + rõhu gradient!

Hoovused ja lained ning nende võrrandid: senised lihtsustused

- **Pingetensor sümmeetriline** (üldiselt klassika, aga mitte kõigi pidevate kehade puhul)
- **Stokesi lähendus** (bulk viscosity = 0)
- **Viskoossus** on (kiiruse gradiendi) **lineaarne** funktsioon – **Newtoni vedelik**
- Viskoossus **hüljatav + kokkusurumatu → Euleri** võrrandid
- Viskoossus **pole hüljatav → Navier-Stokesi** võrrandid
- Vedelik **barotroopne** – tihedus sõltub vaid rõhust

Vedeliku liikumise võrrandite rakendamise valdkonnad meres

- Ookeani & atmosfääri tsirkulatsioon: Navier-Stokesi võrrandid 3-mõõtmelisel juhul (rannikuprotsesside kursuses ei vaatle)
- Hoovused rannikumeres: vertikaalkiirus sageli ebaoluline või lihtsalt arvutatav, seetõttu kasutatakse **madala mere lähendust**
- Hoovuste ja jõe voolu **hüdraulika** (suurelt jaolt baseerub Bernoulli võrrandi rakendustel)
- **Lainetus** (eriti pinnalained - mittestatsionaarne pöörisevaba voolamine - Bernoulli võrrandi rakendus)
- +... paljud-paljud muud valdkonnad

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz\right] = \left(\vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})\right)_x$$

=0 =0

Statsionaarne pöörisevaba voolamine

$$\nabla\times\vec{u} = 0 \qquad \nabla B = \vec{u}\times\left(\nabla\times\vec{u}\right) = 0$$

$$\vec{0} = (0,0,0)$$

→statsionaarne hõõrdevaba ja pöörisevaba barotroopne voolamine:

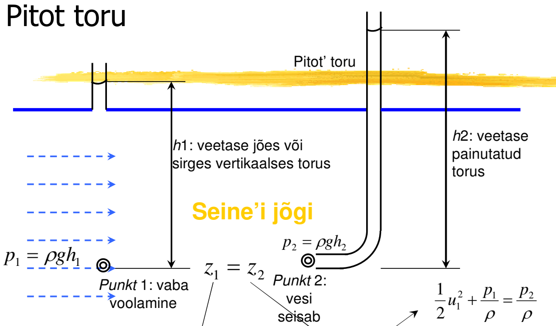
$$\boxed{B = \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz = const}$$

Kogu vedelikuga täidetud alas!

Harjutus II:

Pitot toru – Bernoulli integraali klassikaline rakendus

Pitot toru



$$\frac{1}{2}u_1^2 + \int \frac{dp_1}{\rho} + gz_1 = \frac{1}{2}u_2^2 + \int \frac{dp_2}{\rho} + gz_2$$

$$u_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}u_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{p_2}{\rho}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}}$$

$$u_1 = \sqrt{2g(h_2 - h_1)}$$

Pöörisevaba liikumine: pidevuse võrrand lihtsustub

(massi jäävuse seadus pideva keha mehaanikas)

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho\vec{u}\right) = 0} \qquad \rho = const \qquad \mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$

Leidub funktsioon φ(x,y,z,t) nõnda, et $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

DEF: φ(x,y,z,t) – kiiruse potentsiaal

Laplace'i võrrand

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \overset{def}{=} \Delta\varphi = 0$$

Harjutus III:

Kiiruse potentsiaal

Laplace'i võrrandi lahendamine muutujate eraldamise meetodi abil

Kiiruse potentsiaal

Funktsioon φ(x,y,z,t) nõnda, et $\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Leida kiiruse komponendid, kui potentsiaal on

$$\varphi = 8x^3 + 15xyz + y^2 + 3z + 9t^6 + \sin 3t + 156$$

$$u = 24x^2 + 15yz$$
$$v = 15xz + 2y^2$$
$$w = 15xy + 3$$

Kas selline kiirusväli on

(i) statsionaarne?

(ii) pöörisevaba?

$$\vec{u}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u & v & w \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} v & w \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} w & u \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u & v \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)$$

Laplace'i võrrand: muutujate eraldamine

$\Delta\varphi=0$

Vertikaalne struktuur

Lahendit otsitakse kujul $\varphi = f(z)G(x,t)$

(muutujate eraldamise meetod)

Horisontaalne struktuur

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \equiv \varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}=0$$

1D lained!

$$\varphi_{xx} = f(z)G_{xx}(x,t) \qquad \varphi_{yy} = f(z)G_{yy}(x,t)=0 \qquad \varphi_{zz} = f''(z)G(x,t)$$

$$\Delta\varphi = f(z)G_{xx}(x,t)+f''(z)G(x,t)=0$$

$$f(z)G_{xx}(x,t)+f''(z)G(x,t)=0$$

$$\frac{G_{xx}(x,t)}{G(x,t)} = \frac{-f''(z)}{f(z)}$$

Laplace'i võrrand: muutujate eraldamine II

$\Delta\varphi=0$

Vertikaalne struktuur $\varphi = f(z)G(x,y,t)$

Horisontaalne struktuur

$$p(x,t)=\frac{G_{xx}(x,t)}{G(x,t)}=\frac{-f''(z)}{f(z)}=q(z)$$

$$q(z)=p(x,t)=\frac{G_{xx}(x,t)}{G(x,t)}=\frac{-f''(z)}{f(z)}$$

$$q'(z)=\frac{d}{dz}p(x,t)=0 \Rightarrow q(z)=const=p(x,t)=C_0$$

$$\frac{G_{xx}(x,t)}{G(x,t)}=C_0 \Rightarrow G_{xx}(x,t)=C_0G(x,t)$$

$$f''+\omega^2 f=0 \Rightarrow f=C_1\sin\omega x+C_2\cos\omega x$$ Ostsilleeruv lahend, lained

$$f''-\omega^2 f=0 \Rightarrow f=C_1e^{\omega x}+C_2e^{-\omega x}$$ Eksponent, mitte-laineline

Pole üldse oluline, et lainete kiiruse potentsiaali x,y sõltuvus oleks siinusekujuline!

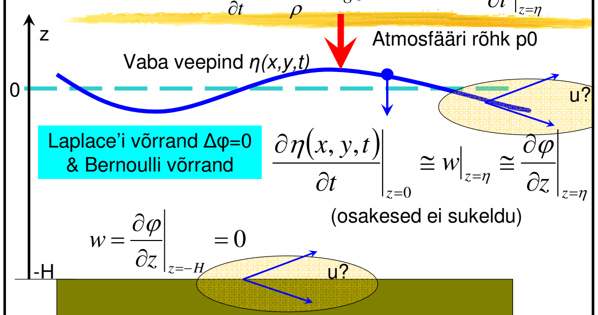
Klassikalises pinnalainete teoorias vaadeldakse liikumisi / keskkonda, mis on:

- Pidev keskkond, kus kehtivad Newtoni seadus ja massi jäävuse seadus
- Cauchy võrrandid lihtsustatakse (Newtoni vedelik, olekuvõrrandid) → Navier-Stokesi võrrandid
- Kokkusurumatu (heli ei levi)
- Konstantse tihedusega (pidevuse võrrand lihtsam)
- Hõõrdevaba (→ Euleri võrrandid)
- Barotroopne – tihedus sõltub vaid rõhust → Bernoulli võrrand
- Pöörisevaba (eksisteerib kiiruse potentsiaal, Bernoulli funktsioon sõltub ainult ajast, pidevuse võrrand taandub Laplace'i võrrandiks)
- Mittestatsionaarne liikumine

Rajatingimused

Bernoulli funktsioon pinnal

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{p-p_0}{\rho}+gz=0 \qquad g\eta+\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=\eta}=0$$



Laplace'i võrrand $\Delta\varphi=0$ & Bernoulli võrrand

$$\left.\frac{\partial\eta(x,y,t)}{\partial t}\right|_{z=0} \cong w|_{z=\eta} \cong \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=\eta}$$

(osakesed ei sukeldu)

$$w=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-H}=0$$

Lainete matemaatika I: Laplace'i võrrand ja muutujate eraldamine

$\Delta\varphi=0$

Lahendit otsitakse kujul $\varphi = f(z)\sin(kx+ly-\omega t)$

(muutujate eraldamise meetod)

$$f''(z)\sin(kx+ly-\omega t)-(k^2+l^2)f(z)\sin(kx+ly-\omega t)=0$$

$$f(z)=C_1\exp\left(z\sqrt{k^2+l^2}\right)+C_2\exp\left(-z\sqrt{k^2+l^2}\right) \qquad \sqrt{k^2+l^2}=\kappa$$

$$f(z)=C_1e^{\kappa z}+C_2e^{-\kappa z}$$

NB! Pole üldse oluline, et x,y sõltuvus oleks siinusekujuline → ülesanne

- Lainete vertikaalne struktuur ~eksponent sügavusest
- Konstandid C1, C2: rajatingimustest

$$w=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-\infty}=0$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}+\frac{1}{g}\left.\frac{\partial^2\varphi(x,y,0,t)}{\partial t^2}\right|_{z=0}=0 \qquad w=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-H}=0$$

Lainete matemaatika III: kas lahend on olemas?

$$\varphi = f(z)\sin(kx+ly+\omega t)$$

$$f(z)=C_1e^{\kappa z}+C_2e^{-\kappa z}$$

$$C_1(\omega^2-g\kappa)+C_2(\omega^2+g\kappa)=0$$

$$C_1e^{-\kappa H}-C_2e^{\kappa H}=0$$ või $C_2=0$ (väga sügav – põhjatu - meri)

(realistlik meri) $\omega=\sqrt{g\kappa}$

2. järku homogeenne võrrandisüsteem: lahend vaid siis, kui determinant=0

dispersiooniseos

$$\omega^2=g\kappa\frac{e^{\kappa H}-e^{-\kappa H}}{e^{\kappa H}+e^{-\kappa H}}=g\kappa\tanh(\kappa H) \qquad \omega=\sqrt{g\kappa\tanh(\kappa H)}$$

Laine amplituud: kirjeldub suvaliste konstantide C_1 C_2 kaudu

Ei ole seotud laine ülejäänud parameetritega (lineaarses lähenduses!)

Lainete perioodid/sagedused pole juhuslikud! $\eta = a\sin(kx+ly+\omega t)$

Enamasti on lainete periood/sagedus ja pikkus (ka levikusuund) omavahel seotud!

Lineaarses lähenduses amplituud pole seotud laine muude omadustega!

DEFINITSIOON

DISPERSIOONISEOS on seos lainete leviku suuna ja pikkuse ning lainete perioodi või sageduse vahel

$$\omega = \omega(k,l)$$

Siselained

$$\omega^2 = N_0^2 \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1^2 + k_2^2 + n^2}$$

Rossby lained

$$\omega(k,l) = \frac{-k}{k^2 + l^2 + a_R^2}$$

mittelineaarne Schrödingeri võrrand

$$\omega(\vec{\kappa}) = |\kappa|^\alpha$$

Dispersiooniseose päritolu ehk valikute puudumine

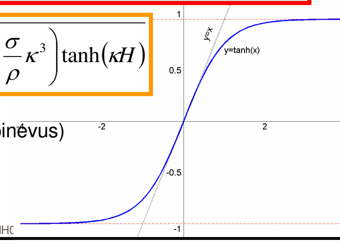
Dispersiooniseos: rajaülesande lahenduvuse tingimus ehk KÕIK selle klassi lained rahuldavad seda

Füüsikaline mõte: laine parameetreid ei saa valida vabalt; laine periood/sagedus on määratud lainepikkusega

$$\omega(\vec{\kappa}) = \omega(k,l) = \sqrt{\left(g\kappa + \frac{\sigma}{\rho}\kappa^3\right)\tanh(\kappa H)}$$

$$\kappa = \sqrt{k^2 + l^2}$$

(incl. pindpinevus)



Lainete matemaatika: tehtud lihtsustused

- Laine kuju: siinus / koosinus (selline eeldus tegelikult pole vajalik)
- Amplituud/kõrgus väike võrreldes nii lainepikkuse kui vee sügavusega
- Viskoossus ja pindpinevus hüljatud
- Coriolise jõud hüljatud
- Merepõhi sile
- Lõpmatu meri (ei mingeid randasid)
- Lained 1-mõõtmelised (s.o. lõpmata pikad sirged laineharjad)

Lainete parameetrid valemites

Kiiruse potentsiaal

$$\varphi = f(z)\cos(kx+ly+\omega t)$$

$$f(z)_{\text{sügav vesi}} = \frac{ag}{\omega}e^{-\kappa z}$$

Laine vertikaalne struktuur

$$f(z) = \frac{ag}{\omega}\frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH}$$

Veeosakeste kiirus avaldub kiiruse potentsiaali kaudu

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = w$$

Veepinna kuju: Bernoulli funktsioonist

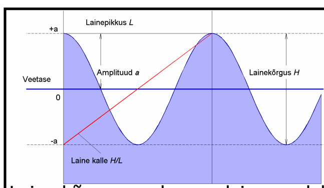
$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{p-p_0}{\rho} + gz\right]_{z=\eta(x,y,t)} = 0 \qquad \eta(x,y,t) \approx -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(x,y,0,t)}{\partial t}$$

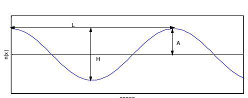
$$\eta = a\sin(kx+ly+\omega t)$$

Gravitatsiooni-kiirendus, Amplituud, Kiiruse potentsiaal, Lainearv, Vertikaal-koordinaat, Vee sügavus, Lainevektori komponendid, Ringsagedus, Aeg

$$\varphi = \frac{ag}{\omega}\frac{\cosh\kappa(z+H)}{\cosh\kappa H}\cos(kx+ly+\omega t)$$

Ringsagedus, Horisontaalkoordinaadid





Lainesõnastik

Laine kõrgus - vahemaa laine madalaima/kõrgeima punkti vahel

(pinnalaine) amplituud - 1/2 lainekõrgusest

pikkus - vahemaa kahe järjestikuse laineharja vahel

periood - ajaintervall kahe järjestikuse laineharja

sagedus - mingit punkti läbivate laineharjade arv ajaühikus = 1/periood

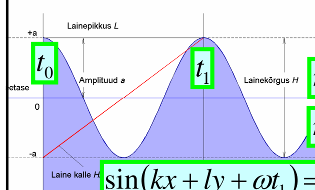
kalle (järskus, steepness) = laine kõrgus / laine pikkus

faasikiirus – laineharjade (samafaasipunktide) leviku kiirus

rühmakiirus – energia leviku kiirus

Valemid ja tegelik elu I: periood

Veepinna kuju $\eta = a\sin(kx+ly+\omega t)$



$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$$

$$\eta_0 = a\sin(kx+ly+\omega t_0)$$

$$\eta_1 = a\sin(kx+ly+\omega t_1)$$

$$\sin(kx+ly+\omega t_1) = \sin(kx+ly+\omega t_0 + 2\pi)$$

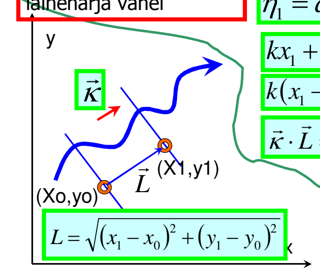
$$\omega t_1 = \omega t_0 + 2\pi \qquad t_1 = t_0 + \frac{2\pi}{\omega}$$

Laine periood - ajaintervall kahe järjestikuse laineharja vahel

$$T = t_1 - t_0 = \frac{2\pi}{\omega}$$

Valemid ja tegelik elu II: lainepikkus

Laine pikkus - vahemaa kahe järjestikuse laineharja vahel



$L = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

$\eta_0 = a\sin(kx_0 + ly_0 + \omega t)$

$\eta_1 = a\sin(kx_1 + ly_1 + \omega t)$

$kx_1 + ly_1 = kx_0 + ly_0 + 2\pi$

$k(x_1 - x_0) + l(y_1 - y_0) = 2\pi$

$\vec{\kappa} \cdot \vec{L} = 2\pi$

$\kappa = \sqrt{k^2 + l^2}$

$\vec{\kappa} = (k, l)$

$\kappa L \cos(\vec{\kappa}, \vec{L}) = 2\pi$

$L = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 + l^2}}$

Lainevektor ja miks seda vaja on

DEFINITSIOON

LAINEVEKTOR $\vec{\kappa} = (k, l)$ on selline vektor, mis on suunatud laine leviku suunas ning mille pikkus on 2π/lainepikkus

LAINEARV on lainevektori pikkus $\kappa = \sqrt{k^2 + l^2}$

Lainete sageduse analoog

$\eta = a\sin(kx + ly + \omega t)$

Laine periood T= $2\pi/\omega$

Laine sagedus f=1/T= $\omega/2\pi$

Laine pikkus L= $2\pi/\kappa$

Lainearv κ = 2π/L

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

2π on vajalik seetõttu, et sin ja cos periood on 2π

$L = \frac{2\pi}{|\vec{\kappa}|} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 + l^2}}$

Probleemid ühikutega

Laine periood T= $2\pi/\omega$ [sekund]

Laine sagedus f=1/T= $\omega/2\pi$ [1/sekund]

Laine (ring)sagedus $\omega=2\pi$f [radiaan/sekund]

2π on vajalik ainult seetõttu, et sin ja cos periood on 2π [radiaani]

π [radiaani] = 180º

Laine pikkus L= $2\pi/\kappa$ [meetrit]

Lainearv κ = 2π/L [radiaan/meeter]

Harjutus IV:

Laine põhilised parameetrid

Dispersiooniseos

(Ring)sagedus, periood, pikkus, lainearv

Laine periood on 5 sekundit. Leida sagedus ja ringsagedus

Laine periood T= $2\pi/\omega$ [sekund]

Laine sagedus f=1/T= $\omega/2\pi$ [1/sekund]

Laine (ring)sagedus $\omega=2\pi$f [radiaan/sekund]

Laine pikkus on 20 meetrit. Leida lainearv

Lainearv κ = 2π/L [radiaan/meeter]

Laine 1 on kaks korda pikem kui laine 2. Kumba lainearv on suurem? Kui palju?

DISPERSIOONISEOS on seos lainete leviku suuna ja pikkuse ning lainete perioodi või sageduse vahel

Dispersiooniseos I

$\varphi = f(z)\sin(\kappa x + \omega t)$

$f(z) = C_1 e^{\kappa z} + C_2 e^{-\kappa z}$

$\omega^2 = g\kappa \frac{\exp(\kappa H) - \exp(-\kappa H)}{\exp(\kappa H) + \exp(-\kappa H)}$

$\omega = \sqrt{g\kappa \tanh(\kappa H)}$

(realistlik meri)

$\omega = \sqrt{g\kappa}$

(väga sügav – põhjatu - meri)

Laine pikkus sügavas ookeanis on 100 meetrit. Leida periood, sagedus ja ringsagedus

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{g\frac{2\pi}{L}} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g\frac{2\pi}{L}} = \sqrt{\frac{2\pi g}{(2\pi)^2 L}} = \sqrt{\frac{g}{2\pi L}}$$

$$T = \sqrt{\frac{2\pi L}{g}} = \sqrt{\frac{2\pi}{g}}\sqrt{L} \approx 0.8003\sqrt{L}$$

T=8 sekundit

Sagedus 0.125Hz

Ringsagedus: 2π/T~0.785 rad/s

$T \approx 0.8\sqrt{L}$

Hea lihtne valem, kuid ainult väga sügavas vees!!!

Dispersiooniseos II

$$\varphi = f(z)\sin(\kappa x + \omega t)$$

$$f(z) = C_1 e^{\kappa z} + C_2 e^{-\kappa z}$$

$$\omega^2 = g\kappa \frac{\exp(\kappa H) - \exp(-\kappa H)}{\exp(\kappa H) + \exp(-\kappa H)}$$

$$\omega = \sqrt{g\kappa \tanh(\kappa H)}$$

(realistlik meri)

$$\omega = \sqrt{g\kappa}$$

(väga sügav – põhjatu - meri)

Laine pikkus 10 meetri sügavuses vees on 100 meetrit. Leida periood, sagedus ja ringsagedus. Võrrelda tulemusi: (1) 100 meetri sügavuse veega, (2) väga sügava veega

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{g\frac{2\pi}{L}\tanh\frac{2\pi}{L}H} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g\frac{2\pi}{L}} = \sqrt{\frac{2\pi g}{(2\pi)^2 L}\tanh\frac{2\pi}{L}H} = \sqrt{\frac{g}{2\pi L}\tanh\frac{2\pi}{L}H}$$

$$T = \sqrt{\frac{2\pi}{g}\frac{L}{\tanh\frac{2\pi}{L}H}} = \sqrt{\frac{2\pi}{g}}\sqrt{L}\sqrt{\frac{1}{\tanh\frac{2\pi}{L}H}}$$

Võrdlus: väga sügavas vees oli

$$T = \sqrt{\frac{2\pi}{g}}\sqrt{L}$$

Suhe:

$$T_{lõpliksügavus} = T_{vägasügav}\sqrt{\frac{1}{\tanh\frac{2\pi}{L}H}}$$

H=10m → 0.5569

H=100m → 0.9999930

Dispersiooniseos III

$$\omega^2 = g\kappa \frac{\exp(\kappa H) - \exp(-\kappa H)}{\exp(\kappa H) + \exp(-\kappa H)}$$

$$\omega = \sqrt{g\kappa}$$

(väga sügav – põhjatu - meri)

(realistlik meri)

$$\omega = \sqrt{g\kappa \tanh(\kappa H)}$$

Laine periood sügavas vees on 10 sekundit. Leida laine pikkus ja lainearv (1) sügavas vees, (2) 100 meetri sügavuses vees ja (3) 10 meetri sügavuses vees. Võrrelda tulemusi.

Sügavas vees:

$$\omega = \sqrt{g\kappa} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{g\frac{2\pi}{L}} \Leftrightarrow \frac{(2\pi)^2}{T^2} = g\frac{2\pi}{L}$$

$$\frac{2\pi}{T^2} = \frac{g}{L} \Leftrightarrow L = \frac{g}{2\pi}T^2 = 156.1m$$

$$\boxed{L \approx 1.56T^2}$$

Jälle hea lihtne valem, kuid ainult väga sügavas vees!!!

Võrdlus: valemid perioodi/pikkuse jaoks väga sügavas vees

$$\boxed{T \approx 0.8\sqrt{L}}$$

Lainepikkus ~periood ruudus

Dispersiooniseos IV

$$\omega^2 = g\kappa \frac{\exp(\kappa H) - \exp(-\kappa H)}{\exp(\kappa H) + \exp(-\kappa H)}$$

$$\omega = \sqrt{g\kappa}$$

(väga sügav – põhjatu - meri)

(realistlik meri)

$$\omega = \sqrt{g\kappa \tanh(\kappa H)}$$

?

Laine periood sügavas vees on 10 sekundit. Leida laine pikkus ja lainearv (1) sügavas vees, (2) 100 meetri sügavuses vees ja (3) 10 meetri sügavuses vees. Võrrelda tulemusi.

Reaalses meres: transtsendentne võrrand

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{g\kappa \tanh \kappa H} \approx 0.628 \qquad \kappa H \tanh \kappa H = \frac{1}{g}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \approx 0.0402H$$

H=10 → kH=~0.68 → k=0.068, L=92.4m

H=100 → kH=~4.022 → k=0.04022, L=156m

Võrdlus: 100 m sügavuses lainepikkus sama, mis väga sügavas

Lainearvude leidmine! – koduseks ülesandeks

Praktilisi valemeid keskmise sügavusega vees ehk ühed parameetrid teiste kaudu

Dispersiooniseosest keskmise sügavusega vees saame:

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{g\frac{2\pi}{L}\tanh\left(\frac{2\pi}{L}h\right)} \qquad \boxed{L = \frac{gT^2}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi}{L}h\right)}$$

- Üsna keerukas võrrand lainepikkuse jaoks

$$L = \frac{gT^2}{2\pi}\sqrt{\tanh\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{h}{g}\right)}$$

Võimaldab "otse" arvutada lainepikkust perioodi kaudu; viga alla 10% kui H/L<1/2

Keerukam, kuid ometi praktiline valem:

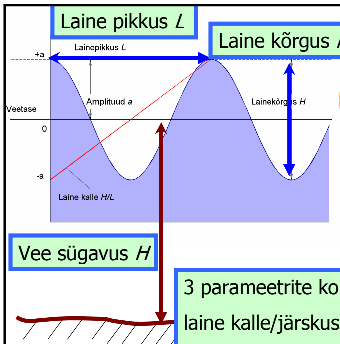
$$L = L_0\left\{\tanh\left[\left(2\pi\sqrt{\frac{h}{gT^2}}\right)^{3/2}\right]\right\}^{2/3}$$

L_0 perioodiga T lainete pikkus sügavas vees Valemi viga alla 1,7 % (Dean ja Dalrymple 2002, lk. 90)

Mõõdulint

Laine pikkus L

Laine kõrgus h



Vee sügavus H

Merepõhi

3 pikkusmõõtu:
laine pikkus L
laine kõrgus h
vee sügavus H

3 parameetrite kombinatsiooni:

laine kalle/järskus = laine kõrgus/pikkus - h/L

suhteline kõrgus = kõrgus/vee sügavus h/H

suhteline sügavus = sügavus/lainepikkus **H/L**

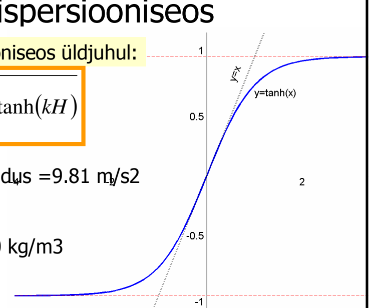
Pinnalainete dispersiooniseos

Pinnalainete dispersiooniseos üldjuhul:

$$\boxed{\omega(\vec{\kappa}) = \sqrt{\left(gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3\right)\tanh(kH)}}$$

g - gravitatsioonikiirendus =9.81 m/s2
H - vee sügavus
σ - pindpinevustegur
ρ - vee tihedus ~1000 kg/m3

$$\boxed{\vec{\kappa} = (k, l)}$$



$$\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

$$\boxed{\tanh(z) \approx 1, z \to \infty}$$

$$\boxed{\tanh(z) \approx z, z << 1}$$

Harjutus V: dispersiooniseose erinevad kujud erineva sügavusega mere jaoks

$$\omega=\sqrt{g\kappa\tanh(\kappa H)}$$

$$\omega=\sqrt{g\kappa\tanh(\kappa H)}=\sqrt{g\kappa\frac{e^{\kappa H}-e^{-\kappa H}}{e^{\kappa H}+e^{-\kappa H}}}$$

$H\to 0$? $H<<1$ madal meri

$H\to\infty$? $H>>1$ sügav meri

$H\to\infty$

$$\lim_{H\to\infty}\omega=\lim_{H\to\infty}\sqrt{g\kappa\frac{e^{\kappa H}-e^{-\kappa H}}{e^{\kappa H}+e^{-\kappa H}}}=\sqrt{g\kappa\lim_{H\to\infty}\frac{e^{\kappa H}-e^{-\kappa H}}{e^{\kappa H}+e^{-\kappa H}}}\quad\frac{\infty}{\infty}\,??$$

jagada $e^{\kappa H}$

$$\boxed{\lim_{H\to\infty}\omega=\sqrt{g\kappa\lim_{H\to\infty}\frac{1-e^{-2\kappa H}}{1+e^{-2\kappa H}}}=\sqrt{g\kappa}}$$

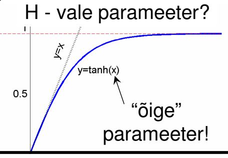
Dispersiooniseos sügava mere jaoks

$H\to 0$?

$$\lim_{H\to 0}\omega=\lim_{H\to 0}\sqrt{g\kappa\frac{e^{\kappa H}-e^{-\kappa H}}{e^{\kappa H}+e^{-\kappa H}}}=\sqrt{g\kappa\lim_{H\to 0}\frac{e^{\kappa H}-e^{-\kappa H}}{e^{\kappa H}+e^{-\kappa H}}}$$

$$\lim_{H\to 0}\omega=\sqrt{g\kappa\lim_{H\to 0}\frac{e^{0}-e^{-0}}{e^{0}+e^{-0}}}=\sqrt{g\kappa\lim_{H\to 0}\frac{1-1}{1+1}}=0$$

H - vale parameeter?



"õige" parameeter!

Harjutus V: dispersiooniseose erinevad kujud erineva sügavusega mere jaoks II $H\to 0$?

$$\omega=\sqrt{g\kappa\tanh(\kappa H)}$$

$$\omega=\sqrt{g\kappa\tanh(\kappa H)}=\sqrt{g\kappa\frac{e^{\kappa H}-e^{-\kappa H}}{e^{\kappa H}+e^{-\kappa H}}}\qquad\lim_{H\to 0}\frac{e^{\kappa H}-e^{-\kappa H}}{e^{\kappa H}+e^{-\kappa H}}=0$$

Kuidas lihtsustada dispersiooniseost väikeste sügavuste jaoks?

Taylori rida!! $f(b+\Delta x)=f(b)+\Delta x f'(b)+\boxed{\frac{1}{2}(\Delta x)^2 f''(b)+\cdots}$ Väike kui dx<<1

$$\tanh'(b)=\frac{d}{db}\left(\frac{e^b-e^{-b}}{e^b+e^{-b}}\right)=\frac{(e^b-e^{-b})'(e^b+e^{-b})-(e^b-e^{-b})(e^b+e^{-b})'}{(e^b+e^{-b})^2}$$

$$\tanh'(b)\big|_{b=0}=\left.\frac{(e^b+e^{-b})(e^b+e^{-b})-(e^b-e^{-b})(e^b-e^{-b})}{(e^b+e^{-b})^2}\right|_{b=0}=\frac{(1+1)(1+1)-(1-1)(1-1)}{(1+1)^2}=1$$

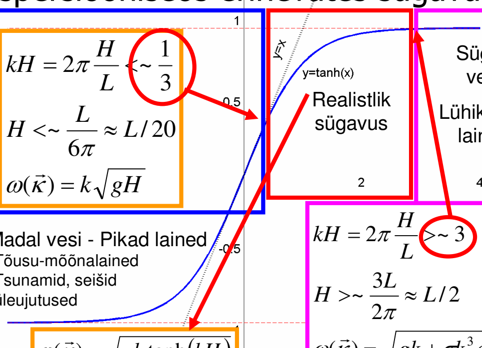
$$\tanh(\kappa H)=\underbrace{\tanh(\kappa H=0)}_{=0}+kH\underbrace{\tanh'(\kappa H=0)}_{=1}+\text{väikesed liidetavad}$$

$$\tanh(\kappa H)\approx kH$$

$$\omega\big|_{kH<<1}=\sqrt{g\kappa\tanh(\kappa H)}\Big|_{kH<<1}=\sqrt{g\kappa\,\kappa H}=\kappa\sqrt{gH}$$

Dispersiooniseos madalas vees

Dispersiooniseos erinevates sügavustes



$$kH=2\pi\frac{H}{L}<\sim\frac{1}{3}$$

$$H<\sim\frac{L}{6\pi}\approx L/20$$

$$\omega(\vec{\kappa})=k\sqrt{gH}$$

Madal vesi - Pikad lained

Tõusu-mõõnalained

Tsunamid, seišid

üleujutused

$$\omega(\vec{\kappa})=\sqrt{gk\tanh(kH)}$$

Realistlik sügavus

Sügav vesi

Lühikesed lained

$$kH=2\pi\frac{H}{L}>\sim 3$$

$$H>\sim\frac{3L}{2\pi}\approx L/2$$

$$\omega(\vec{\kappa})=\sqrt{gk+\sigma k^3\rho^{-1}}$$

Kiirused

Mis liigub laines?

(Keskkond (materjal) ise oluliselt ei liigu)

Põhiliselt liigub energia; seega

laine = nähtus, mille puhul energia levib keskkonnas ilma, et keskkond oluliselt liiguks või ümber kujuneks.

Tegelikult liiguvad:

I. Energia – põhiliselt

II. Keskkonna osakesed – veidi

III. Laineharjad (faas)

Lained võivad olla:

I. Progressiivsed lained – energia liigub mingis suunas

II. Seisulained (energia paikneb mingis piirkonnas)

ShowProgressiveWave.m

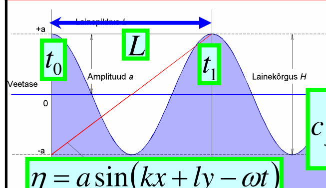
ShowStandingWave.m

Kiirus I: liiguvad laineharjad

DEFINITSIOON

FAASIKIIRUS on laineharjade leviku kiirus

$$T=t_1-t_0=\frac{2\pi}{\omega}$$



$$L=\frac{2\pi}{|\vec{\kappa}|}=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2+l^2}}$$

$$c_f=\frac{\text{tee pikkus}}{\text{kulunud aeg}}=\frac{L}{T}$$

$$\eta=a\sin(kx+ly-\omega t)$$

Ülesanne: leida faasikiirused madala ja sügava vee jaoks

$$c_f=\frac{L}{T}=\frac{2\pi/\kappa}{2\pi/\omega}=\frac{\omega}{\kappa}=\frac{\omega}{\sqrt{k^2+l^2}}$$

Lainete klassifikatsioon dispersiooniseose tüübi järgi

$$c_f = \frac{\omega}{\kappa}$$

DEFINITSIOON

Laineid (lainesüsteemi, laineklassi jne) nimetatakse DISPERGEERUVATEKS, kui lainete faasikiirus sõltub lainepikkusest või laine leviku suunast

A. Mittedispergeeruvad lained: $\omega = \kappa$
pinnalained väga madalas vees, väga pikad lained meres, kiirlaevalained, helilained, elektromagnetilised lained

B. Normaalne: pikemad lained levivad kiiremini kui lühemad - pinnalained üldjuhul, Rossby lained, siselained

C. Anomaalne: pikemad lained levivad aeglasemalt kui lühemad - kapillaarlained vee pinnal

Pinnalained võivad olla väga erinevad

A. Väga lühikesed lained: L<<1 [m]; k>>1; kH>>1; tanh(kH)~1; $\omega(\vec{\kappa}) = \sqrt{gk + \sigma k^3 \rho^{-1}}$ $c_f \sim 1/\sqrt{L}$

Kapillaarlained vee pinnal + anomaalne dispersioon: pikemad lained levivad aeglasemalt kui lühemad -- L<<1.7cm

B. "Keskmise" pikkusega lained "keskmise" sügavusega vees: normaalne dispersioon - pikemad lained levivad kiiremini kui lühemad; pindpinevus ebaoluline

$\omega(\vec{\kappa}) = \sqrt{gk}$ või $\omega(\vec{\kappa}) = \sqrt{gk \tanh(kH)}$ $c_f \sim \sqrt{L}$

C. Väga pikad lained väga madalas vees: kõik lained levivad sama kiirusega - tanh(kH)~kH

$\omega(\vec{\kappa}) = k\sqrt{gH}$ $c_f = \sqrt{gH} = const$

Harjutus 6: Praktilisi valemeid SÜGAVAS VEES

$kH > 3$
$H > L/2$

Tegelikud seosed

$\omega(\vec{\kappa}) = \sqrt{g\kappa}$ $c_f = \sqrt{g/\kappa}$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $L = \frac{2\pi}{\kappa}$

$$\omega = \sqrt{g\kappa} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{g\frac{2\pi}{L}} \Rightarrow L = \frac{gT^2}{2\pi} \approx \left(\frac{T}{0.8}\right)^2$$

kuna $\sqrt{g/(2\pi)} \approx 1.2495 \approx 1/0.8003$ $T \approx 0.8\sqrt{L}$

$$c_f = \sqrt{\frac{g}{\kappa}} = \sqrt{\frac{g}{2\pi}L} \approx \frac{\sqrt{L}}{0.8}$$

$$L \approx 1.56T^2$$
$$c_f \approx \sqrt{1.56L} = 1.56T$$

Veeosakeste liikumine laine sees

$\varphi = f(z)\sin(kx + \omega t)$ $f(z) = \frac{ag}{\omega}\frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH}$

Normaalne vesi

Horisontaal-suund $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{agk}{\omega}\frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH}\cos(kx + \omega t)$

Vertikaal-suund $w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{agk}{\omega}\frac{\sinh k(z+H)}{\cosh kH}\sin(kx + \omega t)$

Sügav vesi $f(z) = \frac{ag}{\omega}e^{kz}$ $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

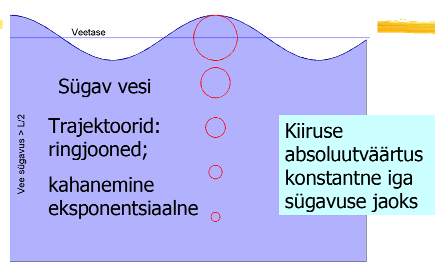
$u = \frac{agk}{\omega}e^{kz}\cos(kx + \omega t)$ $w = \frac{agk}{\omega}e^{kz}\sin(kx + \omega t)$

Kiiruse moodul sügavas vees (H=∞)

$$V(z) = \sqrt{u^2 + w^2} = \frac{agk}{\omega}e^{kz}$$

- Sõltub ainult laine parameetritest ja veeosakese asukoha sügavusest
- Kahaneb eksponentsiaalselt sügavuse suurenedes
- Kindla sügavuse jaoks konstantne nii ajas kui ruumis
- Maksimaalne väärtus vee pinnal $V_{\max} = \frac{agk}{\omega} = \frac{ag}{c_f}$

Veeosakeste liikumine laine sees sügavas meres



$u = \frac{agk}{\omega}e^{kz}\cos(kx + \omega t)$ $w = \frac{agk}{\omega}e^{kz}\sin(kx + \omega t)$

Kiiruse moodul reaalses meres

$$V_{\max}(z)=\sqrt{u^2+w^2}=\frac{agk}{\omega\cosh kH}\times$$
$$\times\sqrt{\cos^2(kx-\omega t)+\sinh^2 k(z+H)}$$

Pinnal (z=0) $$V(0)=\frac{agk}{\omega\cosh kH}\sqrt{\cos^2(kx-\omega t)+\sinh^2 kH}$$

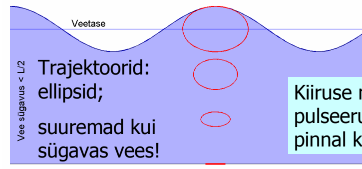
Kiiruse moodul pulseerub nii pinnal kui põhjas!!

Põhjas (z=-H) $$V(z=-H)=\frac{agk}{\omega\cosh kH}\left|\cos(kx-\omega t)\right|$$

Soomere 2010 EMH0090 Rannikuprotsessid

Veeosakeste liikumine laine sees realistlikus meres

Lõpliku sügavusega meri



Kiiruse moodul pulseerub nii pinnal kui põhjas

Maksimaalne horisontaalkiirus pinnal sama, kui samade parameetritega laines lõpmata sügavas vees; maksimaalne vertikaalkiirus tanh(kH) võrra väiksem

Vertikaalsuunaline kiirus kahaneb sügavuse suurenedes kiiremini kui horisontaalsuunaline

S Põhjas ainult horisontaalsuunaline kiirus

Mis toimub laine sees?

$kH=1$ $\quad 0\le z\le 1$

$$\varphi=f(z)\sin(kx+\omega t)$$

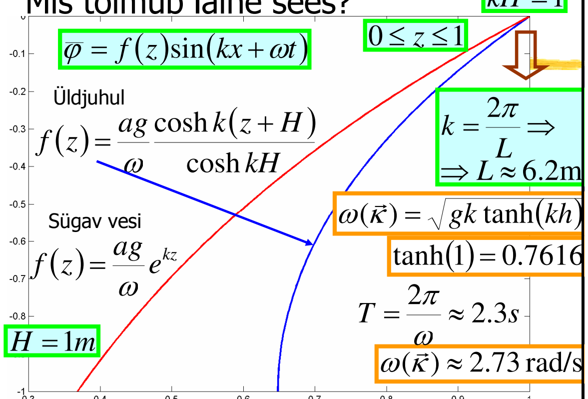
Üldjuhul
$$f(z)=\frac{ag}{\omega}\frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH}$$

Sügav vesi
$$f(z)=\frac{ag}{\omega}e^{kz}$$

$H=1m$

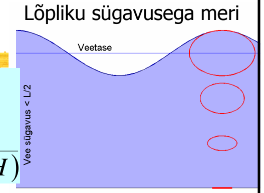
$$k=\frac{2\pi}{L}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow L\approx 6.2\text{m}$$

$$\omega(\vec{\kappa})=\sqrt{gk\tanh(kh)}$$
$$\tanh(1)=0.7616$$
$$T=\frac{2\pi}{\omega}\approx 2.3s$$
$$\omega(\vec{\kappa})\approx 2.73\ \text{rad/s}$$



Laine poolt tekitatud maksimaalne põhjalähedane kiirus

Lõpliku sügavusega meri



$$V(z)=\sqrt{u^2+w^2}=\frac{agk}{\omega\cosh kH}\times$$
$$\times\sqrt{\cos^2(kx-\omega t)+\sinh^2 k(z+H)}$$

$$\sinh x=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$$

$$V_{\max}(z=-H)=\frac{agk}{\omega\cosh kH}$$

Veeosakeste kiirus laines (ka lõpmata sügavas meres) sügavusel -H: sõltub nii mere sügavusest, lainekõrgusest kui perioodist

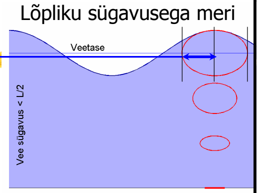
$$V=\frac{agk}{\omega e^{kH}}\qquad\frac{1}{2}\left(e^{-kH}+e^{kH}\right)$$

$$V_{\max}(-H)=\frac{a\omega}{\sinh kH}$$

Soomere 2010 EMH0090 Rannikuprotsessid

Laine poolt tekitatud keskmine põhjalähedane kiirus

Lõpliku sügavusega meri



Horisontaalsuunalise liikumise amplituud pinnal = ellipsi pooltelg

$$B_x=a\frac{\cosh k(z+H)}{\sinh kH}$$

Horisontaalsuunalise liikumise amplituud põhjas:

$$B_H=a\frac{\cosh 0}{\sinh kH}=\frac{a}{\sinh kH}$$

$$V_{mean}=\frac{l}{T}=\frac{4a\omega}{2\pi\sinh kH}$$

$$V_{\max}(-H)=\frac{a\omega}{\sinh kH}$$

Ühe laineperioodi T=2π/ω jooksul läbitakse vahemaa l=4Bh; seega keskmine kiirus

$$V_{\text{mean}}=\frac{2V_{\text{maxb}}}{\pi}$$

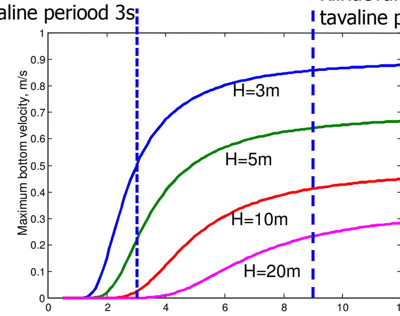
Soomere 2010 EMH0090 Rannikuprotsessid

Kui suur on põhjalähedane kiirus?

Lainekõrgus 1 m

Looduslike lainete tavaline periood 3s

Kiirlaevalainete tavaline periood >9s



Sc

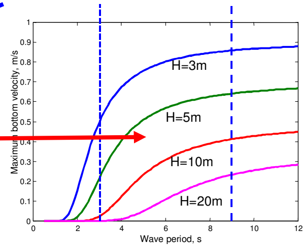
Asjad on keerulisemad, kui näib

$$V_{\max}(-H)=\frac{a\omega}{\sinh kH}=\frac{2\pi a}{T\sinh kH}=\frac{2\pi a}{T\sinh(2\pi H/L)}$$

Võib jääda vale mulje, et fikseeritud sügavuse H korral Vmax KAHANEB, kui lainete periood suureneb

(Mis pole tõsi! –vt. lk. 133)

Põhjus: lainepikkus L ning sinh (2πH/L) muutub koos perioodi muutumisega



Küll aga sõltub põhjalähedane kiirus lineaarselt laine kõrgusest

Kodused ülesanded:

(Eeldada, et tegemist on siinuslainetega ja perfektselt sileda merepõhjaga)

- Laine kõrgus on 1 m ja periood 5 s. Leida keskmine põhjalähedane kiirus 10 m sügavuses meres.
- Hoovusemõõtja registreeris 5 m sügavusel merepõhjas vee maksimaalseks kiiruseks 10 cm/s. Lainete periood oli 4 sekundit. Leida laine kõrgus
- Sügavas vees on laine periood 5 sekundit. Millisel sügavusel on veeosakeste kiirus 50% pinnal paiknevate veeosakeste kiirusest?
- Sügavas meres levivad kõrvuti kaks lainet, mõlemad 1 meetri kõrgused, kuid laine 1 on kaks korda järsem kui laine 2. Kumba laine harjad liiguvad kiiremini?

Energia ja selle liikumine

Lainete energia: energiatihedus

A. Kineetiline energia
B. Potentsiaalne energia

$$E_K(x,z,t)=\frac{1}{2}\rho V^2=\frac{1}{2}\rho\left(u^2+w^2\right)$$

$$E_K=\frac{a^2\rho gk}{\sinh 2kH}\left[\cos^2(kx+\omega t)+\sinh^2 k(z+H)\right]$$

Liikumise energia mingis veemassi punktis

- varieerub nii ajas kui ruumis;
- maksimaalsed väärtused veepinna lähistel

Kineetiline energia veesambas

Integreerime üle kõikide sügavuste mingi mere punkti x jaoks: $\eta\approx 0$

$$\mathrm{E}^{xt}_{kin}=\int_{-H}^{\eta}\mathrm{E}^{xzt}_{kin}dz$$

$$\hat{\mathrm{E}}_K(x,t)=\frac{a^2\rho gk}{2}\left[\frac{H\cos 2(kx-\omega t)}{\sinh 2kH}+\frac{1}{2k}\right]$$

Liikumise energia varieerub mere erinevates punktides; seetõttu kasutatakse energia keskmist väärtust laineperioodi kohta

$$\tilde{\mathrm{E}}_K(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\hat{\mathrm{E}}_K(x,t)dt$$

$$\tilde{\mathrm{E}}_K(t)=\frac{a^2\rho g}{4}$$

- ei sõltu enam ruumikoordinaadist; sõltub AINULT lainete amplituudist

Potentsiaalne ja koguenergia

$$\mathrm{E}_P(x,t)=\int_0^{\eta}\rho gzdz=\frac{1}{2}\rho ga^2\cos^2(kx+\omega t)$$

$$\mathrm{E}_P(x)=\frac{1}{2T}\int_0^{T}\rho ga^2\cos^2(kx+\omega t)dt=\frac{1}{4}\rho ga^2$$

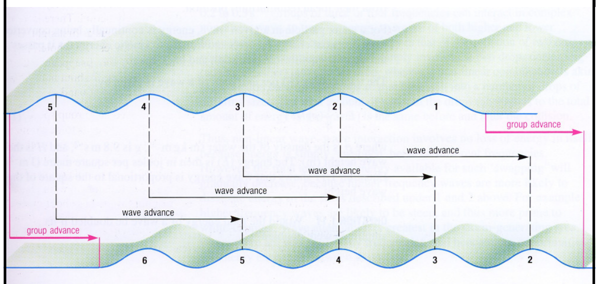
Kogu energia tihedus amplituudi ja lainekõrguse kaudu

$$\mathrm{E}=\frac{a^2\rho g}{2}\left[\frac{m\cdot kg\cdot m^2}{m^3s^2}=\frac{N\cdot m^2}{m^3}=\frac{J}{m^2}\right]$$

$$\mathrm{E}=\frac{1}{8}h^2\rho g$$

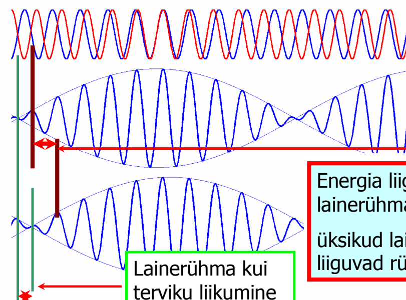
Sõltub ainult lainekõrgusest; ei sõltu mere sügavusest ega laine muudest omadustest

Lainerühma liikumine



WaveGroupPropagation.m

Kuidas liigub lainete energia ehk lainerühmade osa dünaamikas



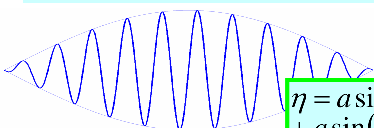
Laineharjade liikumine

Energia liigub koos lainerühmaga;

üksikud laineharjad liiguvad rühma sees

Lainerühm kui terviku liikumine

Lainerühma matemaatika: kaks lainet

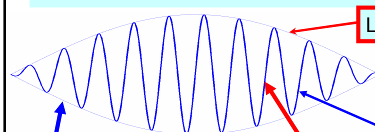


$$\eta = a\sin\big(\overbrace{k_1x + l_1y - \omega_1 t}^{\alpha}\big) + a\sin\big(\underbrace{k_2x + l_2y - \omega_2 t}_{\beta}\big)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\eta = a\sin\frac{(k_1+k_2)x + (l_1+l_2)y + (\omega_1+\omega_2)t}{2} \times \cos\frac{(k_1-k_2)x + (l_1-l_2)y + (\omega_1-\omega_2)t}{2}$$

Lainerühm: kahe laine liitumine



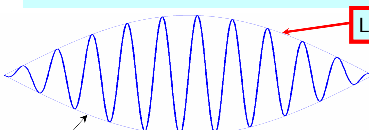
Lainerühma mähisjoon

$$\eta = 2a\eta_1 \times \eta_2$$

$$\eta = 2a\sin\left[\frac{(k_1+k_2)}{2}x + \frac{(l_1+l_2)}{2}y + \frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t\right] \times \cos\left[\frac{(k_1-k_2)}{2}x + \frac{(l_1-l_2)}{2}y + \frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t\right]$$

Lainerühma mähisjoon: samuti laine

Lainerühm: kahe laine liitumine



Lainerühma mähisjoon

Lainerühma liikumine = energia liikumine = mähisjoone liikumine

$$\eta_{envelope} = 2a\cos\left[\frac{(k_1-k_2)}{2}x + \frac{(l_1-l_2)}{2}y + \frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t\right]$$

$$c_g = c_{f[envelope]} = \frac{\omega_{envelope}}{k_{envelope}} = \frac{\omega_1-\omega_2}{\Delta_{kl}} = \frac{\omega_1-\omega_2}{\sqrt{(k_1-k_2)^2 + (l_1-l_2)^2}}$$

Lainete erinevus on väike $\Rightarrow$

$$c_g = \lim_{\Delta_{kl}\to 0}\frac{\omega_1-\omega_2}{\Delta_{kl}} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}, \frac{\partial\omega}{\partial l}\right)$$

Rühmakiirus

DEFINITSIOON

RÜHMAKIIRUS on laineenergia leviku kiirus

$$c_g = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}, \frac{\partial\omega}{\partial l}\right)$$

Mittedispergeeruvad lained: $\omega = \lambda k$
pinnalained väga madalas vees, väga pikad lained meres, kiirlaevalained, helilained, elektromagnetilised lained: rühmakiirus võrdne ja samasuunaline faasikiirusega, sest sel juhul

$$c_f = \frac{\omega}{k} \equiv \frac{\partial\omega}{\partial k} = const$$

Rossby lained: rühmakiirus võib olla vastassuunaline faasikiirusele

Siselained: rühmakiirus on risti faasikiirusega

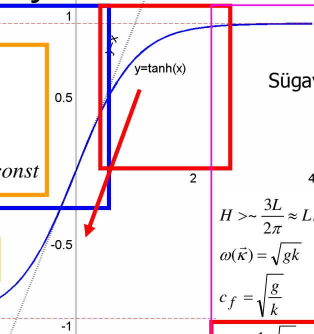
Rühmakiiruse ja faasikiiruse suhe

Madal vesi

$$h <\sim \frac{L}{6\pi} \approx L/20$$

$$\omega(\vec{\kappa}) = k\sqrt{gH}$$

$$c_f = c_g = \sqrt{gH} = const$$



Sügav vesi

$$H >\sim \frac{3L}{2\pi} \approx L/2$$

$$\omega(\vec{\kappa}) = \sqrt{gk}$$

$$c_f = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$\omega(\vec{\kappa}) = \sqrt{gk \tanh(kH)}$$

$$\frac{1}{2} c_f \le c_g \le c_f$$

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\omega}{2k}\left(1 + \frac{2kH}{\sinh 2kH}\right) = \frac{c_f}{2}\left(1 + \frac{2kH}{\sinh 2kH}\right)$$

$$c_g = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} c_f$$

Laineenergia levi: lainete energia voog

DEFINITSIOON

Lainete ENERGIA VOOG on laineenergia ja selle leviku kiiruse korrutis

$$P = Ec_g \left[\frac{W}{m}\right]$$

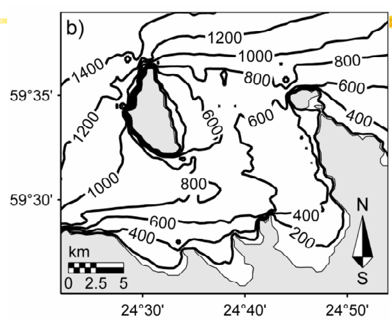
(sageli hüütakse ka võimsuseks/võimsustiheduseks

Lainete energia voog (võimsus) iseloomustab, kui intensiivselt lained energiat transpordivad

Pikemad lained transpordivad energiat intensiivsemalt kui lühemad, kuna nende rühmakiirus on suurem

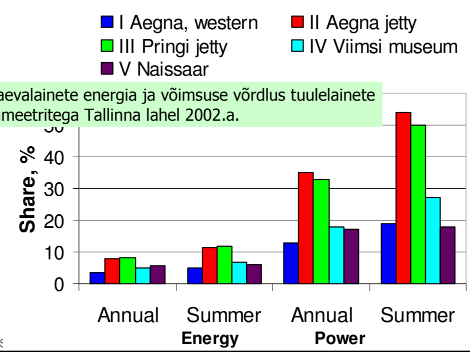
$$c_g = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g}{8\pi}}\sqrt{L}$$

Tuulelainete energia voog Tallinna lahel



Boreal Environment Research, 2005

Vahe ilmneb erineva päritoluga lainete võrdlemisel



Kiirlaevalainete energia ja võimsuse võrdlus tuulelainete parameetritega Tallinna lahel 2002.a.