KIIRUSED LINEAARSETE PINNALAINETE VÄLJAS

Lineaarsete pinnalainete matemaatilisele ülesandele

$$\Delta\varphi = 0\,, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} + \frac{1}{g}\left.\frac{\partial^2\varphi(x,y,0,t)}{\partial t^2}\right|_{z=0} = 0 \tag{4.1a}$$

$$w = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-H} = 0\,;\ \text{sügavas vees}\ w = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-\infty} = 0\,. \tag{4.1b}$$

otsiti lainelahendit muutujate eraldamise meetodil, oletades, et laine vertikaalne ja horisontaalne struktuur on teatavas mõttes sõltumatud. Selgus, et üldkujul $\varphi = f(z)q(x,y,t)$ esituv lainelahend peab olema klassikalise laine kujuga, seega $\varphi = f(z)\sin(kx + ly - \omega t)$. Taoline lainelahend eksisteerib parajasti siis, kui kehtib dispersiooniseos

$$\omega = \sqrt{g\kappa\tanh(\kappa H)}\,,\ \text{sügavas vees}\ \omega = \sqrt{g\kappa}\,,\ \text{madalas vees}\ \omega = \kappa\sqrt{gH} \tag{4.2}$$

Kogu senine analüüs on teostatud *mittepööriselise* liikumise jaoks, mil veeosakeste kiiruse $\vec{v}(x,y,z,t)$ komponendid u,v,w

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,,\ v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,,\ w = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{4.3}$$

avalduvad teatava skalaarse funktsiooni – kiiruse potentsiaali $\varphi = \varphi(x,y,z,t)$ osatuletiste kaudu. Kiiruse potentsiaal ise avaldub eksponentfunktsioonide kaudu

$$\varphi = \frac{ag}{\omega}\frac{\cosh\kappa(z+H)}{\cosh kH}\sin(\vec{\kappa}\cdot\vec{x} - \omega t)\,;\ \text{sügavas vees}\ \overline{\varphi} = \frac{ag}{\omega}e^{kz}\sin(\vec{\kappa}\cdot\vec{x} - \omega t)\,. \tag{4.4}$$

Veepinna kuju avaldub mõlemal juhul Bernoulli võrrandist pärineva lineariseeritud dünaamilise rajatingimuse abil seosest

$$\eta(x,t) \approx \frac{1}{g}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=0} = a\cos(kx + ly - \omega t) \tag{4.5}$$

ning veesamba sees valitsev rõhk samuti (lineariseeritud) Bernoulli võrrandist, mis tehtud eelduste korral kehtib kogu veesambas (2.20):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + gz + \frac{p - p_0}{\rho} = 0\,,\ \text{millest}\ p = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \rho gz\,. \tag{4.6}$$

See võrrand kehtib, nagu enne märgitud, kogu vedeliku ruumalas.

Kordan ikka ja jälle, et tehniliselt märksa lihtsamate „sügava vee” või „madala vee” lähenduste kasutamine on adekvaatne sõltuvalt mitte lihtsalt lainepikkusest või vee sügavusest, vaid suuruse κH väärtusest. Kuna hüperboolse tangensi argument sõltub lainearvust (lainepikkusest), sõltub 'piisav' sügavus samuti lainepikkusest. Kapillaarlainete jaoks, mille pikkus on mõni kuni mõniteist millimeetrit, on 'piisavalt' sügav juba 1 m sügavune vesi, kuid avaookeani ummiklainete, mille pikkus on sageli üle saja meetri, puhul on vajalikuks sügavuseks mitusada meetrit. Teisalt on pikad ummiklained ookeani rannikul sageli väga pikad (ja kehtib madala vee lähendus) juba kahekümne-kolmekümne meetri sügavuse vee puhul. Tsunamid on pikad, madala vee lained ka sügavas avaookeanis. Kuna suur osa insener-tehnilisest kirjandusest esitab vaid lihtsustatud valemid sügava vee jaoks, rannikumere dünaamika ülesannetes on aga oluline lainete mõju põhjale, on vajalikud seosed allpool esitatud paralleelselt. Lihtsuse huvides vaatleme edasi kahemõõtmelisi laineid, lugedes $v(x, y, z, t) = 0$ ning valides x-telje laineleviku suunas.

1. Faasikiirus

Laineharjade liikumise kiirust c_f nimetatakse faasikiiruseks, mille leidmine on võimalik järgmise arutelu kaudu. Seda kiirust on võimalik leida, teadmata praktiliselt mitte midagi lainetuse dünaamikast peale lainet iseloomustavate põhimõistete.

Vaatleme konkreetset laineharja, mis ajahetkel t_0 asub punktis x_0. Sellele järgnev hari on hetkel t_0 parajasti ühe lainepikkuse $\lambda = 2\pi/k$ kaugusel ning liigub punkti x_0 suunas, kuhu jõuab hetkel t_1. Kuna tegemist on laineharjaga, mis vastab veepinna maksimaalsele tõusule, kehtib mõlemal ajahetkel seos $\cos(kx_0 - \omega t_0) = \cos(kx_0 - \omega t_1) = 1$; seega $\omega t_1 = \omega t_0 + 2n\pi$, kus n on suvaline täisarv. Juhule $n = 1$ vastab olukord, mil esimesena järgnev hari on kohale jõudnud, juhule $n = 2$ ülejärgmine jne. Niisiis läbivad laineharjad tee $\lambda = 2\pi/k$ ajavahemiku $t_1 - t_0 = 2\pi/\omega$ jooksul ning liiguvad kiirusega

$$c_f = \frac{\omega}{k} \quad \left[\frac{m}{s}\right]. \tag{4.7}$$

Laineid (lainesüsteeme, laineklassi jne.) klassifitseeritakse sageli selle alusel, mil moel sõltub lainete faasikiirus nende pikkusest.

Laineid nimetatakse dispergeeruvateks, kui lainete faasikiirus sõltub lainepikkusest või laine leviku suunast ning mittedispergeeruvateks (ehk dispersioonivabadeks) siis, kui mistahes pikkuse ning mistahes suunas levivate lainete faasikiirused on võrdsed[1]. Teisisõnu, sellisel juhul on lainete faasikiirus määratud eksklusiivselt keskkonna omadustega. Mittedispergeeruvate lainete klassikalisteks näideteks on elektromagnetlained (mis vaakuumis levivad valguse kiirusega) ja helilained (mille leviku kiiruse määravad keskkonna omadused).

Suurem osa lainetest on dispergeeruvad. Dispersiooni kutsutakse normaalseks siis, kui pikemad lained levivad kiiremini kui lühemad. Sellisteks näiteks Rossby lained (suuremõõtmelised lained Maa pinnal, mille olemasolu tugineb Maa pöörlemise ja sfäärilisuse koosmõjule, mille tõttu Coriolisi parameeter muutub põhja-lõunasihis) ja siselained stratifitseeritud keskkondades. Anomaalseks kutsutakse dispersiooni siis, kui lühemad lained levivad pikematest kiiremini. Tuntuim seda tüüpi lainete klass on väga lühikesed pinnalained, mida nimetatakse kapillaarlaineteks.

[1] Loomulikult peetakse silmas seda, et lainete faasikiirus on konstantne seni, kuni keskkonna omadused ei muutu.

Pinnalainete maailmas esinevate erinevate nähtuste sisulisest rikkusest ja põnevusest võib aimu saada, pannes tähele, et kõiki ülal loetletud erinevaid lainete tüüpe on võimalik pinnalainete seas kohata. Nii on näiteks dispersioonivabad väga pikad lained madalas vees, mille faasikiirus on

$$c_{f-long} = \sqrt{gH} = const \tag{4.8}$$

ning on täielikult määratud vee sügavusega. Selliste lainete tüüpilisteks esindajateks on tsunamid (mille lainepikkus on ~100 km), kiirlaevalainete pikemad komponendid ning madalasse rannavett jõudnud ummiklained. Selline lähendus on adekvaatne siiski vaid teatavatel erijuhtudel, sest tegelikult erinevad erineva pikkusega madala vee lainete faasikiirused üksteisest siiski mõnevõrra.

Lõviosa vee pinnal levivatest lainetest, sh. tavalised tuulelained, kujutavad endast normaalset dispersiooni järgivaid häiritusi. Tõepoolest, isegi kivi vette viskamisel tekkivad pikemad lained liiguvad kiiresti kivi kukkumiskohast eemale ning lühemad jäävad neist selgelt maha. Nende faasikiirus on

$$c_f = \sqrt{\frac{g}{\kappa}\tanh(\kappa H)} \tag{4.9}$$

ning kuigi seda pole võrrandi (4.8) keerukast kujust kuigi lihtne näha, vastavad pikematele lainetele suuremad faasikiirused. Normaalsele dispersioonile alluvad ilmselt sügava vee lained, mille puhul faasikiirus

$$c_{f-short} = \sqrt{\frac{g}{\kappa}} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} \approx 1.25\sqrt{L} \tag{4.10}$$

kasvab võrdeliselt ruutjuurega laine pikkusest.

Seevastu väga lühikeste lainete levikut kujundab anomaalne dispersioon. Kui lained on nii lühikesed, et nende käitumisele hakkab märgatavat mõju avaldama vee pindpinevus, on nende dispersiooniseos mõnevõrra keerukam:

$$\omega = \sqrt{\left(g\kappa + \frac{\sigma}{\rho}\kappa^3\right)\tanh(\kappa H)}, \text{ millest } c_{f-cap} = \sqrt{\left(\frac{g}{\kappa} + \frac{\sigma}{\rho}\kappa\right)\tanh(\kappa H)} \tag{4.11}$$

kus σ on vee pindpinevustegur ja ρ tihedus. Kui nüüd lainepikkus väheneb, nii et lainearv κ kõvasti suureneb, siis $\tanh(\kappa H)$ kasv pidurdub üsna kiiresti ning selliste lainete faasikiirus suureneb. Teisisõnu, väga lühikeste lainete puhul on faasikiirus

$$c_{f-cap} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}\kappa} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho L}} \tag{4.12}$$

ligikaudu pöördvõrdeline lainepikkusega.

2. Veeosakeste kiirused ja trajektoorid

Valemite (4.3) ja (4.4) abil on lihtne leida veeosakeste kiiruste *x*- ja *z*-telje suunalised komponendid u, w laines, mille amplituud on a, sagedus ω ja lainearv k :

$$u = \frac{agk}{\omega}\frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH}\cos(kx-\omega t), \quad w = \frac{agk}{\omega}\frac{\sinh k(z+H)}{\cosh kH}\sin(kx-\omega t). \tag{4.13}$$

Sügavas vees kehtivad analoogilised valemid:

$$u = \frac{agk}{\omega} e^{kz} \cos(kx - \omega t); \; w = \frac{agk}{\omega} e^{kz} \sin(kx - \omega t). \tag{4.14}$$

Mitmed käsitlused kasutavad nende suuruste esitamiseks dispersiooniseost ning järgmisi valemeid:

$$u = \frac{agk\omega}{\omega^2} \frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH} \cos(kx - \omega t) = a\omega \frac{\cosh k(z+H)}{\sinh kH} \cos(kx - \omega t),$$
$$w = \frac{agk\omega}{\omega^2} \frac{\sinh k(z+H)}{\cosh kH} \sin(kx - \omega t) = a\omega \frac{\sinh k(z+H)}{\sinh kH} \sin(kx - \omega t); \tag{4.15}$$

sügavas vees:

$$u = a\omega e^{kz} \cos(kx - \omega t); \; w = a\omega e^{kz} \sin(kx - \omega t). \tag{4.16}$$

Esitatud valemid on ekvivalentsed eelmistega ning loomulikult pole vahet, milliseid neid täpselt kasutada.

Kiirenduste leidmine on sama lihtne:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = agk \frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH} \sin(kx - \omega t), \;\; \frac{\partial w}{\partial t} = agk \frac{\sinh k(z+H)}{\cosh kH} \sin(kx - \omega t) \tag{4.17}$$

ning sügavas vees kehtivad kiirenduste kohta analoogilised valemid:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = agke^{kz} \sin(kx - \omega t); \; \frac{\partial w}{\partial t} = agke^{kz} \sin(kx - \omega t). \tag{4.18}$$

Tähelepanuväärne on siin, et horisontaal- ja vertikaalkiirused on omavahel faasinihkes 90 kraadi võrra: parajasti sel ajahetkel, kui horisontaalkiirus on maksimaalne ning $\cos(kx - \omega\hat{t}) = \pm 1$, muutub vertikaalkiirus nulliks: $\sin(kx - \omega\hat{t}) = 0$. Täpselt sama kehtib kiirenduste kohta: ka need on samasuguses faasinihkes.

Kiiruse moodul $|\vec{v}|$ avaldub üldiselt kujul

$$|\vec{v}(x,z,t)| = \frac{agk}{\omega \cosh kH} \sqrt{\cos^2(kx - \omega t) + \sinh^2 k(z+H)}. \tag{4.19}$$

Kuna funktsioon $\sinh k(z+H)$ on monotoonne piirkonnas $0 \le z \le -H$, saavutab kiirus maksimaalse väärtuse

$$|\vec{v}|^z_{\max} = \frac{agk}{\omega \cosh kH} \sqrt{\cos^2(kx - \omega t) + \sinh^2 kH} \tag{4.20}$$

kohal $z = 0$ ehk vee pinnal ning minimaalse väärtuse

$$|\vec{v}|^z_{\min} = \frac{agk}{\omega \cosh kH} |\cos(kx - \omega t)| \tag{4.21}$$

kohal $z = -H$ ehk veekogu põhjas. Viimastest seostest järeldub, et lõpliku sügavusega vees on (1) veeosakeste kiiruse moodul pulseeruv ning et (2) veeosakesed võivad peatuda veekogu põhjas hetkedel, mil $\cos(kx - \omega t) = 0$.

Sügavas vees sõltub veeosakeste kiiruse moodul $|\vec{v}| = agk\omega^{-1}e^{kz}$ ainult laine parameetritest ja sügavusest, on konstantne nii ajas kui horisontaalsihis, saavutab maksimaalse väärtuse $|\vec{v}|_{\max} = agk/\omega$ pinnal ning kahaneb sügavuse suurenedes eksponentsiaalselt. Laine poolt indutseeritud liikumine on seetõttu kontsentreeritud suhteliselt õhukesse pinnakihti, millest ka nimetus pinnalained.

Veeosakeste liikumise trajektoorid saab leida, integreerides valemeid (4.13)–(4.16) aja järgi. Et tegemist on väikese amplituudiga lainetega, saab integreerimisel lugeda muutujaid x ja z konstantideks. Selgub, et veeosakesed võnguvad perioodiliselt ümber punkti, milles nad asuksid laine puudumisel. Võnkumise periood on võrdne laine perioodiga. Võnkumise amplituud sõltub lainepikkusest (või perioodist), laine amplituudist, veekogu sügavusest ning veeosakese asukohast. Võnkumise trajektoorid on üldjuhul ellipsid (sügavas vees ringjooned), millede pikemad teljed on alati horisontaalsuunalised pikkusega

$$B_x = a\frac{\cosh k(z_0+H)}{\sinh kH};\text{ sügavas vees } B_x = B_y = ae^{-kz_0}. \tag{4.22}$$

Vee pinnal on võnkumise vertikaalsuunaline amplituud alati võrdne laine amplituudiga. Lõpliku sügavusega vees on horisontaalsuunaline amplituud suurem laine amplituudist.

Lõpliku sügavusega veekogu põhjas $z_0 = -H$ on horisontaalvõnkumise amplituud vähenenud $\cos kH$ korda võrreldes võnkumise amplituudiga pinnal, kusjuures vahetult põhja juures osakesed võnguvad vaid horisontaalsuunas. Lõpliku sügavusega basseinis on horisontaalvõnkumiste amplituud alati suurem kui samade parameetrite laine poolt tekitatud võnkumiste amplituud sellel sügavusel sügavas vees kus võnkumise amplituud sügavuse kasvades väheneb eksponentsiaalselt.

3. Kiirused veekogu pinnal ja põhjas

Veeosakeste kiirust põhja lähedal saab leida seoste (4.13) või (4.15) kaudu. Põhjas $z_0 = -H$ on vertikaalkiirus $w = 0$ ja horisontaalkiirus

$$u_{z=-H} = \frac{agk}{\omega}\frac{\cos(kx-\omega t)}{\cosh kH}. \tag{4.23}$$

Asendades valemisse (4.23) dispersiooniseose $\omega = \sqrt{gk\tanh kH}$, saame avaldise <u>maksimaalse põhjalähedase kiiruse</u> jaoks, mis realiseerub hetkel, mil $|\cos(kx-\omega t)| = 1$:

$$v_{\mathrm{maxb}} = \frac{agk}{\sqrt{gk\tanh kH}\cosh kH} = \frac{a\sqrt{gk}}{\sqrt{\sinh kH\cosh kH}} = a\sqrt{\frac{2gk}{\sinh 2kH}}. \tag{4.24}$$

Avaldades lainearvu $k = 2\pi/\lambda$ lainepikkuse kaudu, saame veeosakeste maksimaalse v_{maxb} ja keskmise v_{meanb} kiiruse põhja lähistel dimensionaalsel kujul [m/s]:

$$v_{\mathrm{maxb}} = 2a\sqrt{\frac{\pi g}{\lambda\sinh 2kH}},\quad v_{\mathrm{meanb}} = 2v_{\mathrm{maxb}}/\pi = 4a\sqrt{\frac{g}{\pi\lambda\sinh 2kH}}. \tag{4.25}$$

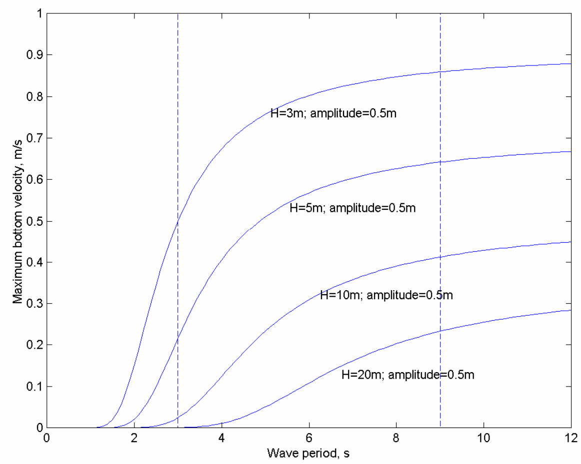
Kui nii lainete periood (või ringsagedus) ja lainearv on teada, saab kasutada valemite (4.24) ja (4.25) märgatavalt lihtsamat versiooni:

$$v_{\max b} = \frac{agk}{\omega\cosh kH} = \frac{a\omega^2}{\omega\tanh kH\cosh kH} = \frac{a\omega}{\sinh kH},\quad v_{\mathrm{meanb}} = 2v_{\mathrm{maxb}}/\pi \tag{4.26}$$

Veeosakeste kiirust veekogu põhjas on võimalik leida ka lihtsate geomeetriliste kaalutluste kaudu. Veeosakesed teevad täistiiru ühe laineperioodi $T = 2\pi/\omega$ [s] jooksul, (ring)sagedus. Selle aja jooksul läbivad nad vahemaa l, mis võrdub neljakordse võnkumise amplituudiga $l = 4B_x = 4a/\sinh kH$ [m]. Keskmine kiirus on niisiis

$$v_{\text{meanb}} = \frac{l}{T} = \frac{4a\omega}{2\pi \sinh kH} = \frac{2a\sqrt{gk \tanh kH}}{\pi \sinh kH} = 2a\frac{\sqrt{2gk}}{\sqrt{\pi \sinh 2kH}}. \tag{4.27}$$

Asendades saadud seosesse lainearvu $k = 2\pi/\lambda$, jõuame valemiteni (4.25) keskmise v_{meanb} ja maksimaalse v_{maxb} kiiruse jaoks.



Joonis 4.1. Maksimaalne põhjalähedane kiirus [m/s] sõltuvalt vee sügavusest H ja laine perioodist 1 m kõrguse laine puhul. Periood 2–3 s on tavaline mõõdukate tuulte poolt (6–10 m/s; samuti tugevamate tormide algusjärgus) genereeritud lainete puhul Tallinna lahel. Periood >9 s on tüüpiline kiirlaevalainete esimesele paketile

Erinevalt lainete energiatihedusest sõltub põhjalähedane kiirus lisaks lainekõrgusele ja vee sügavusele ka lainearvust (ehk lainepikkusest või perioodist). Lainekõrgusest sõltub põhjalähedane kiirus lineaarselt (s.t. kui lainekõrgus kasvab näiteks kaks korda ning seejuures laine periood ning vee sügavus ei muutu, kasvab ka põhjalähedane kiirus kaks korda). Sõltuvus laine perioodist on keerukam (Joonis 4.1).

Üldiselt tekitavad suure perioodiga (s.t. suhteliselt pikad) lained suuremaid põhjalähedasi kiirusi võrreldes sama kõrgete, kuid lühema perioodiga lainetega. Vastavalt on suurem ka põhjalähedase liikumise energia. Nii on 1 m kõrguse (s.o. amplituudiga 0.5 m) ja 9-sekundilise perioodiga laine puhul juba 3 m sügavuses vees põhjalähedane kiirus umbes kaks korda suurem kui sama kõrge, kuid 3-sekundilise perioodiga laine puhul. Põhjalähedane energia on toodud näites pikema laine puhul juba umbes 4 korda suurem kui lühema laine puhul. Veel pikema perioodiga lainete ja sügavama vee puhul on need suhted palju suuremad.

4. Lainete energia

Et lainete energia on jaotunud kogu veesamba ulatuses ja kogu merealale, mida laine läbib, kasutatakse laineliste liikumiste puhul tavaliselt energiatiheduse mõistet. Laine kineetilise energia tihedus mingis mere punktis on laine poolt eri sügavustel liikuma pandud veeosakeste kineetilise energia summa. Kahemõõtmeliste lainete puhul on energia ning energiatihedus konstantsed y-telje suunas ning piisab, kui arvutada energia x-telje sihis.

Sügavusel z, punktis x ja ajahetkel t on laine tekitatud kineetiline energia massiühiku kohta (energiatihedus) seose (4.19) alusel

$$\mathrm{E}_{kin}^{xzt} = \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}\rho\left(u^2 + w^2\right) = \frac{a^2 \rho g k}{\sinh 2kH}\left[\cos^2(kx - \omega t) + \sinh^2 k(z + H)\right], \tag{4.28}$$

Energiatiheduse maksimum on – nagu kiiruse maksimumgi - veepinna lähedal ning sügavuse suurenedes veeosakeste liikumise energia kahaneb.

Laine kineetilise energia tiheduse arvutamiseks mingis merepinna punktis teataval ajahetkel tuleb summeerida kogu veesamba osakeste kineetiline energia

$$\mathrm{E}_{kin}^{xt} = \int_{-H}^{\eta} \mathrm{E}_{kin}^{xzt} dz\,, \tag{4.29}$$

Kui veepinna häiritused on väikesed, võib viimases integraalis võtta $\eta \approx 0$, mis annab

$$\mathrm{E}_{kin}^{xt} = \frac{a^2 \rho g k}{2}\left[\frac{H \cos 2(kx - \omega t)}{\sinh 2kH} + \frac{1}{2k}\right]. \tag{4.30}$$

Valemist (4.30) nähtub, et üldjuhul on laine kineetilise energia tihedus mingis mere punktis pulseeruv funktsioon: laine tekitatud kineetiline energia varieerub nii ajas kui ruumis. Kuna tavaliselt mõeldakse laine all lõpmatut laineharjade jada, kasutatakse lainetuse kineetilise energia hetkväärtuse asemel keskmist energiatihedust.

Keskmise kineetilise energia tiheduse mere mingis punktis saame, integreerides hetkelist energiatihedust E_{kin}^{xt} laine perioodi $T = 2\pi/\omega$ vältel ning jagades tulemuse perioodi pikkusega:

$$\mathrm{E}_{kin}^{x} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{E}_{kin}^{xt} dt = \frac{\omega}{2\pi}\frac{a^2 \rho g k}{2}\int_0^{2\pi/\omega}\left[\frac{H \cos 2(kx - \omega t)}{\sinh 2kH} + \frac{1}{2k}\right]dt = \frac{a^2 \rho g}{4}\,. \tag{4.31}$$

Sama tulemuse annab energiatiheduse E_{kin}^{xt} integreerimine kahe laineharja vahelisel alal mingil ajahetkel ning tulemuse jagamine lainepikkusega.

Valem (4.31) näitab, et keskmine kineetilise energia tihedus mere suvalises punktis sõltub ainult lainekõrgusest (amplituudist) ning ei sõltu laine muudest omadustest (lainepikkus või periood). Sama kirjeldab ka kineetilise energia tihedust sügavas vees. Viimasel juhul on tuletuskäik lihtsam, kuna kiiruse moodul $|\vec{v}| = agk\omega^{-1}e^{kz}$ sõltub ainult sügavusest ning veesamba osakeste kineetilise energia summeerimine viib kohe valemini (4.31).

Laine koguenergia moodustub veeosakeste kineetilisest energiast ja tasakaaluseisundist välja viidud veeosakeste potentsiaalsest energiast. Viimase 'kandjaiks' on tegelikult vaid need osakesed, mis asuvad laineharjades ülalpool rahulikku veepinda ning laine nõgudes allpool veepinda. Kuni vee tihedus vertikaalsuunas ei muutu, on veesamba sees ükskõik, kui sügavale mingil hetkel on veeosakesed liikunud oma esialgse asendiga võrreldes. Seetõttu potentsiaalse energia tiheduse arvutamisel ei ole tarvis arvestada nende veeosakeste potentsiaalset energiat, mis asuvad sügavamal lainete tallast.

Kogu veesamba potentsiaalne energia on $\hat{\mathrm{E}}_{pot}^{xt} = \int_{-H}^{\eta} \rho g z dz$. Laine poolt tekitatud liikumiste potentsiaalse energia saame, kui lahutame sellest sama veesamba potentsiaalse energia vaikses vees $\tilde{\mathrm{E}}_{pot}^{xt} = \int_{-H}^{0} \rho g z dz$; seega

$$\mathrm{E}_{pot}^{xt} = \int_{-H}^{\eta} \rho g z dz - \int_{-H}^{0} \rho g z dz = \int_{0}^{\eta} \rho g z dz . \tag{4.32}$$

Toodud valemis on täiesti ebaoluline kas veepinna häiritus on positiivne või negatiivne. Kuna $\eta(x,t) = a\cos(kx - \omega t)$, avaldub potentsiaalse energia tihedus mere mingis punktis järgmiselt:

$$\mathrm{E}_{pot}^{xt} = \int_{0}^{\eta} \rho g z dz = \frac{1}{2} \rho g z^2 \Big|_0 = \frac{1}{2} \rho g a^2 \cos^2(kx - \omega t). \tag{4.33}$$

Keskmise potentsiaalne energia leitakse analoogiliselt valemi (4.31) tuletamisele:

$$\mathrm{E}_{pot} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{E}_{pot}^{xt} dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2} \rho g a^2 \cos^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{4} \rho g a^2 . \tag{4.34}$$

Ühendades valemid (4.31) ja (4.34), selgub, et keskmine laineenergia tihedus

$$\varepsilon = \frac{1}{2} g \rho a^2 \quad \left[\frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}^3}\right] = \left[\frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{m}^3}\right] = \left[\frac{\mathrm{J} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{m}^3}\right] = \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}\right] \tag{4.35}$$

sõltub mere igas punktis ainult lainekõrgusest ning on proportsionaalne lainekõrguse ruuduga.

5. Rühmakiirus

Laineharjade ja lainete energia levimise kiirused on üldjuhul erinevad. Laineenergia levimise kiirust c_g nimetatakse rühmakiiruseks. Pinnalainete puhul langeb selle suund kokku laineharjade levimise suunaga. Rühmakiirus avaldub dispersiooniseose kaudu järgnevalt:

$$c_g = \frac{\partial}{\partial k} \omega = \frac{\omega}{2k} \left(1 + \frac{2kH}{\sinh 2kH}\right) = \frac{c_f}{2} \left(1 + \frac{2kH}{\sinh 2kH}\right) \quad \left[\frac{m}{s}\right]. \tag{4.36}$$

Sügavas vees on valemil (32) kuju $c_g = c/2$ ehk pinnalainete energia levib täpselt kaks korda aeglasemalt kui laineharjad. Sügavuse vähenedes (lainepikkuse suurenedes) see erinevus väheneb ning suhteliselt madalas vees on rühmakiirus vaid veidi väiksem faasikiirusest.

Lainete energia vooks ehk võimsuseks nimetatakse energia voogu läbi lainete leviku suunaga risti asetseva kujuteldava vertikaalpinna horisontaalpikkuse ühiku:

$$\Phi = \varepsilon c_g = \frac{1}{4} \frac{\omega g \rho a^2}{k} \left(1 + \frac{2kH}{\sinh 2kH}\right) \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] = \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s} \cdot \mathrm{m}}\right] = \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}\right]. \tag{4.37}$$

Lainete võimsus iseloomustab seda, kui palju laineenergiat saabub näiteks mingisse ranna piirkonda ajaühiku jooksul. Kuna pikemate lainete rühmakiirused on suuremad lühemate lainete omadest, toovad lained randa energiat seda intensiivsemalt, mida pikemad nad on. Esitatud valemis (4.37) on võimsuse (energia voo) dimensiooniks vatt (lainaharja) pikkuse ühiku kohta, kuna on kasutatud vertikaalsuunas integreeritud lainete energiatihedust ruutmeetri kohta (tavaliselt antakse energia voog pinnaühiku kohta, kasutades lokaalset energiatihedust ruumiühiku kohta). Tegemist on niisiis sisuliselt võimsustihedusega ning mingisse rannalõiku saabuva energia summaarse voo saame, integreerides võrrandit (4.37) üle vastava rannalõigu pikkuse.

Leitud energiavoog on ekvivalentne laine poolt indutseeritud mehhaanilise võimsusega laine levikuga risti oleva pikkusühiku kohta. Kui näiteks lained jõuavad rannale nii, et nende harjad on paralleelsed rannajoonega, näitab saadud voog rannajoonele jõudvat mehaanilise võimsuse tihedust rannajoone iga meetri kohta.

6. Rõhk laines

Kui veepind on tasakaaluasendis, on rõhk vees sügavusel z konstantne ning avaldub valemiga $p(x,z,t) = p_0 - \rho g z$. Veepinnal leviva laine tekitatud rõhu saab arvutada Bernoulli integraalist (2.20) potentsiaali φ kaudu. Asendades laineid kirjeldava potentsiaali avaldise (4.4) Bernoulli integraali (2.20), leiame, et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -ag\frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH}\cos(kx-\omega t). \tag{4.38}$$

ning

$$p = p_0 - \rho g z + p' = p_0 - \rho g z + a\rho g\frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH}\cos(kx-\omega t), \tag{4.39}$$

kus

$$p' = a\rho g\frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH}\cos(kx-\omega t) \tag{4.40}$$

on rõhu muutumine (fluktutsioon) sügavusel z.

Võrreldes veepinna kuju avaldist $\eta(x,t) = a\cos(kx-\omega t)$ suuruse p' avaldisega, näeme, et veepinnal leviv laine tekitab sügavusel z sama pikkuse, perioodi ja faasiga rõhulaine, mille amplituud $\tilde{a}$ on

$$\frac{\tilde{a}}{a} = \rho g\frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH} \tag{4.41}$$

korda väiksem pinnalaine amplituudist. Kirjeldatud omadus on aluseks lainete parameetrite määramiseks teataval sügavusel ühes punktis sooritatud rõhumõõtmiste kaudu.