

LINEAARSETE PINNALAINETE DISPERSIOONISEOS

Kiiruse potentsiaali vertikaalne struktuur.....	1
1. Muutujate eraldamise meetod	1
2. Lainelahendid	2
3. Dispersiooniseos.....	4
4. Kiiruse potentsiaal ja veepinna kuju.....	6
5. Keerulise matemaatika taga on füüsika	8

Kiiruse potentsiaali vertikaalne struktuur

Eelmises jaotuses formuleeritud matemaatilisele ülesandele

$$\Delta\varphi = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|_{z=0} + \frac{1}{g} \left. \frac{\partial^2\varphi(x, y, 0, t)}{\partial t^2} \right|_{z=0} = 0 \quad (3.1a)$$

$$w = \left. \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0; \text{ sügavas vees } w = \left. \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|_{z=-\infty} = 0. \quad (3.1b)$$

otsitakse tavaliselt kohe lahendit klassikalise laine kujul $\varphi = f(z)\sin(kx + ly - \omega t)$. Nõnda toimides seatakse aga juba enne ülesande lahendamise juurde asumist piirang, et tulemuseks peab olema siinusekujuline laine. Märksa õpetlikum on alustada üldisemat tüüpi lahendite otsimisest ning veenduda, et siinusekujuline lahend peegeldab formuleeritud ülesande lahendite teatavat sisemist struktuuri ning samuti teatavas mõttes on universaalne.

Samuti formuleeritakse paljudes klassikalistes käsitlustes kohe rajatingimused veekogu randades. Enamasti sätestatakse, et saadud lahend peab olema perioodiline funktsioon. Kuigi ka nõnda toimimine on teatavas mõttes loogiline, saab näidata, et perioodilisus on teatavas mõttes ülesande (3.1) lainelahenditele sisse kodeeritud omadus.

1. Muutujate eraldamise meetod

Seetõttu alustame käesolevas kursuses ülesande (3.1) lahendi otsimist mõnevõrra üldisemal kujul:

$$\varphi = f(z)q(x, y, t) \quad (3.2)$$

Selline lahendi otsimise tehnika on erijuht muutujate eraldamise meetodist, mis sageli võimaldab efektiivselt leida osatuletistega diferentsiaalvõrrandite erilahendeid teatavate lihtsamate võrrandite lahendamise kaudu. Sellise oletus (ka „ansatz”) taga on kogemus, et teatavas mõttes on pinnalainete horisontaalne struktuur (laine leviku suund, kiiruste jaotus konkreetses sügavuses) jne. nõrgalt seotud lainete vertikaalse struktuuriga. Loomulikult seab ka eeldus (3.2) olulise piirangu saadud lahendite omadustele. Samas on nõnda leitud lahendid teatavas mõttes universaalsed ja fundamentaalsed ning võimaldavad adekvaatselt kirjeldada looduses esinevaid pinnalaineid.

Arvutades kiiruse potentsiaali osatuletised $\varphi_{xx} = f(z)q_{xx}(k, y, t)$, $\varphi_{yy} = f(z)q_{yy}(k, y, t)$ ja $\varphi_{zz} = f''(z)q(x, y, t)$ ning paigutades need Laplace'i võrrandisse, saame:

$$f(z)[q_{xx}(k, y, t) + q_{yy}(k, y, t)] + f''(z)q(x, y, t) = 0 \quad (3.3)$$

Eeldusel, et $f(z) \neq 0$ ning $q_{xx}(k, y, t) + q_{yy}(k, y, t) \neq 0$ saame võrrandi (3.3) jagada läbi suurusega $f(q_{xx} + q_{yy})$, mis annab järgmise võrrandi:

$$\hat{C}_1(z) = \frac{f''(z)}{f(z)} = -\frac{q_{xx}(k, y, t) + q_{yy}(k, y, t)}{q(x, y, t)} = \hat{C}_2(x, y, t). \quad (3.4)$$

Selle võrrandi parem pool sõltub ainult muutujast z ning vasak pool vaid muutujatest x, y ja t . Seetõttu peavad lahendi (3.2) eksisteerimise korral funktsioonid $\hat{C}_1(z) = C$ ja $\hat{C}_2(x, y, t) = C$ osutama võrdseteks konstantideks¹.

Funktsiooni $f(z)$ jaoks saame seega järgmise hariliku diferentsiaalvõrrandi:

$$f''(z) - Cf(z) = 0. \quad (3.5)$$

Diferentsiaalvõrrandite kursuses näidatakse, et sellise võrrandi lahendi $f(z)$ iseloom sõltub oluliselt suuruse C märgist. Kui $C = 0$, on $f(z)$ teatav lineaarne funktsioon. Negatiivse $C = -\kappa^2$ korral on selle võrrandi üldlahend perioodiline funktsioon

$$f(z) = C_1 \sin(\kappa z) + C_2 \cos(\kappa z) \quad (3.6)$$

ja positiivse $C = \kappa^2$ korral eksponentfunktsioonide kombinatsioon

$$f(z) = C_1 \exp(\kappa z) + C_2 \exp(-\kappa z). \quad (3.7)$$

Vertikaalsuunas perioodiline lahend (3.6) ei ole kooskõlas pinnalainete tuntud omadusega – kõigi lainete poolt indutseeritud omaduste kiire sumbumisega vertikaalsuunas. Lineaarne lahend on interpreteeritav pika laine sturktuurina suhteliselt madalas vees (vt. allpool) ning praegu me seda siin ei vaatle.

Seega oleme jõudnud järeldusele, et pinnalainete vertikaalne struktuur (s.o. laine poolt tekitatava rõhu, kiiruste jne. vertikaalne jaotus) avaldub üldiselt eksponentfunktsioonide kaudu.

2. Lainelahendid

Edasilikumiseks tuleb mingil moel täpsustada funktsiooni $q(x, y, t)$ iseloomu. Kuna otsime praegu lainelahendeid, mis leviksid homogeenses keskkonnas ilma kuju ja kiirust muutmata, on loogiline eeldada, et see funktsioon avaldub kujul

$$q(x, y, t) = q(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) = q(kx + ly - \omega t). \quad (3.8)$$

Taoline lihtsustuse mõte on, et kolme muutuja funktsiooni asemel on meil sisuliselt tegemist ühe muutuja funktsiooniga $q = q(\theta)$, kus $\theta = kx + ly - \omega t$. Sellise iseloomuga funktsiooni puhul on

$$q_{xx}(x, y, t) = k^2 q'', \quad q_{yy}(x, y, t) = l^2 q'' \quad (3.9)$$

ning võrrandi (3.4) parem pool taandub kujule

¹ Formaalne tõestuse üks viisidest on järgmine. Tähistame jagatise $f''(z)/f(z) = Q(z)$. Diferentseerides nüüd võrrandit $Q(z) = f''(z)/f(z) = C_2(x, y, t)$ muutuja z järgi, saame, et $dQ(z)/dz = 0$, millest $Q(z) = const$.

$$q'' + \frac{C}{k^2 + l^2} q = 0. \quad (3.10)$$

Tagasipilk võrrandile (3.5) toob esile kasutatud (muutujate eraldamise) meetodi keskse lihtsustuse: osatuletistega diferentsiaalvõrrandi $\Delta\varphi = 0$ asemel on vaja lahendada kaks (ühe ja sama struktuuriga) harilikku diferentsiaalvõrrandit, mille lahendite omadused on hästi tuntud.

Võrrandi (3.10) lahendite iseloom on peegeldus võrrandi (3.5) lahendite iseloomust. Võimalikud on jällegi lineaarne funktsioon, eksponentide kombinatsioon ning siinus- ja koosinusfunktsioonide kombinatsioon. Vaid viimane neist (juhul, kui konstant $C > 0$ on positiivne) vastab tavapärasele perioodilisele lainele – siinus- ja koosinusfunktsioonide kombinatsioonile

$$q(\theta) = C_3 \sin \tilde{\kappa}\theta + C_4 \cos \tilde{\kappa}\theta, \quad (3.11)$$

kus $\tilde{\kappa} = \sqrt{C/(k^2 + l^2)}$; seega

$$q(x, y, t) = C_3 \sin \tilde{\kappa}(kx + ly - \omega t) + C_4 \cos \tilde{\kappa}(kx + ly - \omega t). \quad (3.12)$$

Taolise lahendi vertikaalne struktuur ehk funktsioon $f(z)$ peab seega avalduma eksponentfunktsioonide kaudu.

Kirjeldatud arutelu näitab, et kõik vaadeldava ülesande lainelahendid $q(x, y, t) = q(kx + ly - \omega t)$, mis on esitatavad eralduvate muutujatega potentsiaali $\varphi = f(z)q(x, y, t)$ abil, (1) avalduvad siinus- ja koosinusfunktsioonide lineaarkombinatsioonina ning (2) vastavate lainete vertikaalne struktuur kirjeldub eksponentfunktsioonide kombinatsiooni kaudu.

Valemi (3.12) paremas pooles paiknev keerukas avaldis kujutab endast tegelikult üht siinus- või koosinusfunktsiooni², mille amplituud on $\sqrt{C_3^2 + C_4^2}$. Teisisõnu,

$$q(x, y, t) = \sqrt{C_3^2 + C_4^2} \sin[\tilde{\kappa}(kx + ly - \omega t) + \beta], \quad (3.13)$$

kus β on mingi suurus, mis sõltub ainult konstantidest C_3 ja C_4 ning mis teatavas mõttes väljendab laineharjade paiknemist, kuid ei ole seotud lainete muude parameetritega. Seetõttu on igati õigustatud klassikalistes käsitlustes kasutatav eeldus

$$q(x, y, t) = \sin(kx + ly - \omega t). \quad (3.14)$$

² Seda saab näidata elementaarsete teisenduste abil, kasutades klassikalist seost $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$. Tõepoolest, kirjutades valemi (3.12) parema poole ümber samasuse kujul

$$q(x, y, t) = C_3 \sin \tilde{\theta} + C_4 \cos \tilde{\theta} = \sqrt{C_3^2 + C_4^2} \left(\frac{C_3}{\sqrt{C_3^2 + C_4^2}} \sin \tilde{\theta} + \frac{C_4}{\sqrt{C_3^2 + C_4^2}} \cos \tilde{\theta} \right) \text{ ning}$$

defineerides $\frac{C_3}{\sqrt{C_3^2 + C_4^2}} = \cos \beta$, on kerge näha et $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{C_4}{\sqrt{C_3^2 + C_4^2}}$ ning seega

$$q(x, y, t) = \sqrt{C_3^2 + C_4^2} (\sin \tilde{\theta} \cos \beta + \cos \tilde{\theta} \sin \beta) = \sqrt{C_3^2 + C_4^2} \sin(\tilde{\theta} + \beta).$$

Sellise eelduse kasutamine tähendab, et vaikimisi viiakse laine amplituud (mida ülal peegeldab suurus $\tilde{\kappa} = \sqrt{C/(k^2 + l^2)}$) ning mis eelduses (3.14) loetakse võrdseks ühega) kiiruse potentsiaali koosseisu. Sellel ei ole põhimõttelist tähendust, sest konstandid lahendis (3.7) on praegu veel vabalt valitavad ning tegu on sisuliselt funktsiooni q normeerimisega. Samas võimaldab see vabaneda integreerimiskoeffitsientidest C_3 ja C_4 ning taandada vaadeldav ülesanne vaid konstantide C_1 ja C_2 leidmisele.

Nõnda toimides saame, et $q_{xx} = -k^2 \sin(kx + ly - \alpha)$, $q_{yy} = -l^2 \sin(kx + ly - \alpha)$ ning võrrandist (3.4) järeldeb:

$$C = -\frac{-k^2 \sin(kx + ly - \alpha) - l^2 \sin(kx + ly - \alpha)}{\sin(kx + ly - \alpha)} = k^2 + l^2 = \kappa^2 \geq 0. \quad (3.15)$$

Tähistades $\kappa = \sqrt{k^2 + l^2}$, saab võrrand (3.5) kuju $f''(z) - \kappa^2 f(z) = 0$ ning võrrandis (3.11) sisalduv konstant on tõepoolest $\tilde{\kappa} = \sqrt{C/(k^2 + l^2)} = 1$.

3. Dispersiooniseos

Lahendis (3.7) sisalduvad integreerimiskonstandid saab määrata rajatingimuste kaudu. Asendades funktsiooni $f(z)$ vee pinnal kehtivasse rajatingimusse (3.1a), saame:

$$\begin{aligned} & [C_1 \kappa \exp(z\kappa) - C_2 \kappa \exp(-z\kappa)] \sin(kx + ly - \alpha) \Big|_{z=0} + \\ & - \frac{1}{g} \omega^2 [C_1 \exp(z\kappa) + C_2 \exp(-z\kappa)] \sin(kx + ly - \alpha) \Big|_{z=0} = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Kuna see tingimus peab kehtima kõikjal, saame siit järgmise seose:

$$(C_1 - C_2)\kappa - \frac{1}{g} \omega^2 (C_1 + C_2) = C_1 \left(\frac{1}{g} \omega^2 - \kappa \right) + C_2 \left(\frac{1}{g} \omega^2 + \kappa \right) = 0. \quad (3.17)$$

Analoogiliselt saame rajatingimusest veekogu põhjas järgmise seose:

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-H} = \{C_1 \kappa \exp(z\kappa) - C_2 \kappa \exp(-z\kappa)\} \Big|_{z=-H} \sin(kx + ly - \alpha) = 0, \quad (3.18)$$

millest järeldeb, et

$$C_1 \exp(-H\kappa) - C_2 \exp(H\kappa) = 0. \quad (3.19)$$

Võrrandid (3.16) ja (3.19) kujutavad endast lineaarset homogeenset võrrandisüsteemi suuruste C_1 ja C_2 jaoks. Selleks, et pinnalainete rajaülesande lahend otsitud kujul eksisteeriks, peab saadud võrrandisüsteemil eksisteerima vähemalt üks lahend C_1 , C_2 . See on võimalik vaid siis, kui selle võrrandisüsteemi determinant on null:

$$(\omega^2 - g\kappa) \exp(H\kappa) + (\omega^2 + g\kappa) \exp(-H\kappa) = 0. \quad (3.20)$$

Saadud võrrandist nähtub, et lainelahendite parameetreid ei saa suvaliselt valida. Avaldades seosest (3.20) suuruse ω , leiame et:

$$\omega^2 = g\kappa \frac{\exp(\kappa H) - \exp(-\kappa H)}{\exp(\kappa H) + \exp(-\kappa H)} = g\kappa \frac{e^{\kappa H} - e^{-\kappa H}}{e^{\kappa H} + e^{-\kappa H}} = g\kappa \tanh(\kappa H); \quad (3.21)$$

teisisõnu,

$$\omega = \sqrt{g\kappa \tanh(\kappa H)}; \quad (3.22)$$

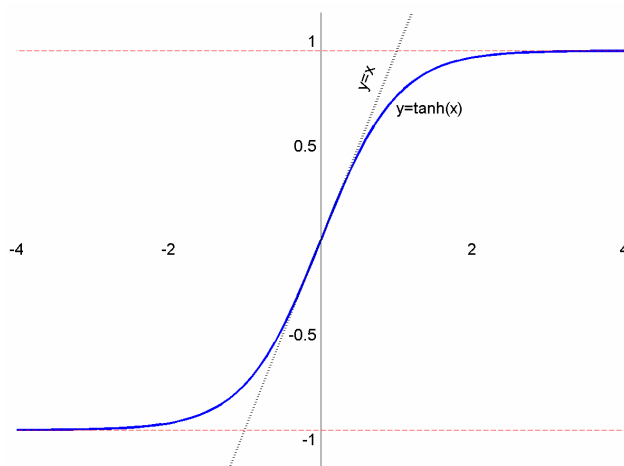
Seega vaadeldava ülesande lahend kujul $\varphi = f(z)\sin(kx + ly - \omega t)$ eksisteerib parajasti siis, kui kehtib seos (3.22). Tuletame meelde, et H on siin vee sügavus ja (dimensioonitud) hüperboolsed funktsioonid defineeritakse järgmiselt: $2 \sinh x = e^x - e^{-x}$, $2 \cosh x = e^x + e^{-x}$, $\tanh x = \sinh x / \cosh x$.

Sügava vee korral $H \rightarrow \infty$ ning võrrandist (3.17) järeldub, et $C_2 = 0$. Seega on võrrand (3.17) mittetriviaalsel juhul $C_1 \neq 0$ rahuldatud parajasti siis, kui

$$\omega^2 = g\kappa, \quad (3.23)$$

mis kujutab endast – nagu oligi oodata – seose (3.21) piirjuhtu siis, kui $\kappa H \rightarrow \infty$. Tõepoolest, kuna argumendi kasvamisel hüperboolne tangens läheneb ühele, siis piisavalt sügavas vees on $\tanh \kappa H \approx 1$ (Joonis 3.1) ja seos (3.22) lihtsustub kujule

$$\omega = \sqrt{g\kappa}. \quad (3.24)$$



Joonis 3.1 Funktsiooni $y = \tanh x$ käitumine.

Teisalt on madalas vees $\tanh \kappa H \approx \kappa H$ ning seos (3.22) on esimeses lähenduses esitatav järgmisel kujul:

$$\omega = \kappa \sqrt{gH}. \quad (3.25)$$

Kui lahend ülaltoodud kujul eksisteerib, on vastava laine pikkus on $\lambda = 2\pi/\kappa$ [m], period $T = 2\pi/\omega$ [s] ja (ring)sagedus ω [rad/s].

Suurust κ nimetatakse linearvuks ning seda väljendatakse ühikutes [rad/m].

Funktsiooni $\theta = kx + ly - \omega t = \vec{\kappa} \cdot \vec{x} - \omega t$ nimetatakse laine faasiks.

Seost (3.22) näitab, et erineva pikkusega lainetel on erinevad sagedused (perioodid), kusjuures igale konkreetse pikkusele ja mere sügavusele vastab kindel periood. Seda seost nimetatakse dispersiooniseoseks. Nimetus tuleneb (hilis)ladina sõnast '*dispersio*', mis

tähendab hajumist. Allpool on näidatud, et erineva pikkusega lained liiguvad erinevate kiirustega, seetõttu paljudest komponentidest koosnev lainesüsteem 'hajub' veekogu pinnal.

4. Kiiruse potentsiaal ja veepinna kuju

Nagu ülal märgitud, on mugav kasutada pinnalainete analüüsil eeldust (3.14), mis võimaldab esitada lainete omadusi nõnda, et lainete amplituudi peegeldab lainete vertikaalset struktuuri kirjeldav funktsioon $f(z)$ ning lainete muud omadusi (pikkust, perioodi, leviku suunda) lainete ruumilisi omadusi kirjeldav funktsioon $q(x, y, t) = \sin(kx + ly - \omega t)$, mille amplituud on 1. Nõnda toimides on tarvis veel määratleda lahendis (3.7) esinevate konstantide C_1 ja C_2 füüsikaline mõte. Teatavas mõttes on nende roll selge: nende kaudu väljendub laine amplituud.

Kuna lainelahendid eksisteerivad vaid siis, kui kehtib dispersiooniseos (3.22) (või selle analoog (3.24)), ei ole konstandid C_1 ja C_2 sõltumatud ning neid on võimalik avaldada teineteise kaudu seoste (3.17) või (3.19) abil. Neist emba-kumba valimiseks on muidugi lõpmata palju võimalusi, ent mõistlik oleks valida need selliselt, et saadavad valemid oleksid võimalikult ülevaatlikud ning füüsikaliselt lihtsalt mõistetavad.

Bernoulli teoreemil põhineva dünaamilise rajatingimuse lihtsustamisel (vt. vastavat peatükki) jõudsimme muu hulgas järeldusele, et vaba vee pinda kirjeldav tundmatu funktsiooni $\eta = \eta(x, y, t)$ avaldub kiiruse potentsiaali kaudu järgnevalt (2.23):

$$\eta(x, y, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t}. \quad (3.26)$$

Seega piisab kiiruse potentsiaali leidmisest nii lainete poolt indutseeritud kiirusvälja määratlemiseks kui ka veepinna kuju leidmiseks.

Asendades potentsiaali kujul

$$\varphi = f(z)q(x, y, t) = f(z)\sin(kx + ly - \omega t) \quad (3.27)$$

võrrandisse (3.26), saame järgmise seose veepinna kuju jaoks:

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t} = \frac{\omega f(0)}{g} \cos(kx + ly - \omega t). \quad (3.28)$$

Saadud esitusest tuleneb, et laine amplituud avaldub kujul

$$a = \frac{\omega f(0)}{g} = \frac{\omega}{g}(C_1 + C_2), \text{ millest ka } C_1 + C_2 = \frac{ag}{\omega}. \quad (3.29)$$

Laine amplituudi defineerimine selles kontekstis võimaldab veidi ülevaatlikumalt läbi viia funktsiooni $f(z)$ lihtsustamise.

Minnes korraks tagasi võrrandi (3.17) juurde, näeme, et vahe $C_1 - C_2$ avaldub kujul

$$C_1 - C_2 = (C_1 + C_2) \frac{\omega^2}{g\kappa} = \frac{a\omega}{\kappa}. \quad (3.30)$$

Saadud kahest võrrandist on lihtne avaldada nii C_1 kui ka C_2 laine amplituudi kaudu:

$$C_1 = a \frac{g\kappa + \omega^2}{2\omega\kappa}, \quad C_2 = a \frac{g\kappa - \omega^2}{2\omega\kappa}. \quad (3.31)$$

Funktsiooni $f(z)$ avaldis (3.7) saab seega kuju

$$f(z) = \frac{a}{2\omega\kappa} [(g\kappa + \omega^2)\exp(z\kappa) + (g\kappa - \omega^2)\exp(-z\kappa)]. \quad (3.32)$$

Asendades viimasesse võrrandisse dispersiooniseose $\omega = \sqrt{g\kappa \tanh(\kappa H)}$, leiame, et³

$$f(z) = \frac{ag}{2\omega} [(1 + \tanh(\kappa H))\exp(z\kappa) + (1 - \tanh(\kappa H))\exp(-z\kappa)] = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh(z+H)\kappa}{\cosh \kappa H}. \quad (3.33)$$

Niisiis oleme jõudnud kiiruse potentsiaali klassikalise avaldiseni lõpliku sügavusega vee jaoks:

$$f(z) = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh(z+H)\kappa}{\cosh \kappa H}. \quad (3.34)$$

Kuni selle kohani on käesolevas peatükis läbi tehtud arutlused universaalsed selles mõttes, et veekogu sügavus võib olla nii lõplik kui ka lõpmatu.

Lõpmata sügava vee jaoks saame seose (3.33) analoogi tuletada, leides piirväärtuse võrrandi (3.33) paremast pooldest juhul, kui $H \rightarrow \infty$. Märksa lihtsam on aga tuletada seose (3.33) analoog, lähtudes ülal tõestatud omadusest $C_2 = 0$. Siis on seose (3.2) tõttu

$$C_1 = \frac{ag}{\omega} \quad (3.35)$$

ning $f(z)$ avaldub märksa lihtsamalt

$$f(z) = C_1 \exp(z\kappa) = \frac{ag}{\omega} e^{z\kappa} \quad (3.36)$$

Funktsioon $f(z)$ avaldub seega kujul

$$f(z) = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh \kappa(z+H)}{\cosh \kappa H}; \quad \text{sügavas vees } f(z) = \frac{ag}{\omega} e^{z\kappa}. \quad (3.37)$$

Kiiruse potentsiaali avaldis on järgmine:

$$\varphi = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh \kappa(z+H)}{\cosh \kappa H} \sin(\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - \omega t); \quad \text{sügavas vees } \bar{\varphi} = \frac{ag}{\omega} e^{kz} \sin(\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - \omega t). \quad (3.38)$$

Veepinna kuju avaldub mõlemal juhul seosega

$$\eta(x, t) = a \cos(kx + ly - \omega t), \quad (3.39)$$

kus a on lainete amplituud.

³ Nurksulgudes tegurit saab lihtsustada järgmiselt:

$$\begin{aligned} (1 + \tanh \kappa H) + (1 - \tanh \kappa H) e^{-z\kappa} &= \left(1 + \frac{e^{\kappa H} - e^{-\kappa H}}{e^{\kappa H} + e^{-\kappa H}}\right) e^{z\kappa} + \left(1 - \frac{e^{\kappa H} - e^{-\kappa H}}{e^{\kappa H} + e^{-\kappa H}}\right) e^{-z\kappa} = \\ &= 2 \frac{e^{\kappa H} e^{z\kappa} + e^{-\kappa H} e^{-z\kappa}}{e^{\kappa H} + e^{-\kappa H}} = 2 \frac{e^{z\kappa + \kappa H} + e^{-z\kappa - \kappa H}}{e^{\kappa H} + e^{-\kappa H}} = 2 \frac{\cosh(z+H)\kappa}{\cosh \kappa H} \end{aligned}$$

Ette rutates mainin, et tehniliselt märksa lihtsam „sügava vee” lähenduse kasutamine on adekvaatne sõltuvalt mitte lihtsalt lainepikkusest või vee sügavusest, vaid suuruse κH väärtusest (vt. joonist 3.1). Kuna hüperboolse tangensi argument sõltub lainearvust (lainepikkusest), sõltub ‘piisav’ sügavus samuti lainepikkusest. Kapillaarlainete jaoks, mille pikkus on mõni kuni mõnieteist millimeetrit, on ‘piisavalt’ sügav juba 1 m sügavune vesi, kuid avaookeani ummiklainete, mille pikkus on sageli üle saja meetri, puhul on vajalikuks sügavuseks mitusada meetrit. Kuna suur osa insener-tehnilisest kirjandusest esitab vaid lihtsustatud valemid sügava vee jaoks, rannikumere dünaamika ülesannetes on aga oluline lainete mõju põhjale, on vajalikud seosed allpool esitatud paralleelselt.

5. Keerulise matemaatika taga on füüsika

Peatume ka lühidalt läbi tehtud matemaatiliste operatsioonide tähendusel. Teatavast tehnilisest keerukusest hoolimata peegeldab toodud arutluskäik üldist lähenemist taolistele ülesannetele. Kõigepealt tuletatakse algprintsipiidest keskkonna liikumise võrrandid. Seejärel piiritletakse uuritav ala ning formuleeritakse füüsikaliselt mõistlikud rajatingimused selle piiridel. Pinnalainete puhul on see võrdlemisi lihtne jäiga ja libeda merepõhja puhul, millest vesi lihtsalt ei saa läbi voolata. Teatavas mõttes on huvitav, et näiteks lõpmata sügava vee puhul piisab rajatingimuse formuleerimisest vaid vertikaalkiiruse jaoks. Selle taga on asjaolu, et kõik laine poolt indutseeritud suurused (resp. laine vertikaalne struktuur), ka horisontaalkiirused, muutuvad sügavuse muutumisel samas rütmis niipea, kui lahendit otsitakse muutujate eraldamise meetodi abil. Nõnda peegelduvad tegelikult juba rajatingimuste formuleeringu juures kaudselt mitmete põlvkondade kogemused lainete uurimises.

Edasi on võimalik minna kahes suunas. Klassikaline matemaatiline lähenemine vajab lisaks veel algingimusi ehk vähemalt veeosakeste kiiruste jaotust uuritavas alas mingil ajahetkel. Kuna see on üldiselt teadmata, on loogiline katsuda leida lisaks informatsiooni selle kohta, milline võiks olla lainete struktuur. Selline lähenemine on analoogiline harilike diferentsiaalvõrrandite fundamentaallahendite leidmisele. Selle käigus tehakse aga otsuseid nii-öelda kaine mõistuse alusel, jättes kõrvale sellised lahendid, millel pole midagi ühist tavapäraste lainetega. Nõnda toimimine on konkreetset juhul õigustatud, kuid matemaatilises mõttes sisaldab endas teatavat riski loobuda ebatavalistest, kuid siiski võimalikest nähtustest.

Muutujate eraldamise meetodi esimene nähtav tulemus on tõsiasi, et laine vertikaalne struktuur kirjeldub eksponentfunktsioonide lineaarkombinatsiooni kaudu. Kui lõpliku sügavusega vees on muutused vertikaalsihis üsna ebaülevaatlikud, siis sügavas vees on asjad lihtsad: kõik laine omadused, mis vertikaalsihis muutuvad, kahanevad eksponentsiaalselt. Kui esimene tõsiasi selgub juba Laplace'i võrrandi analüüsist, siis teine tuleb ilmsiks loogilisest positsioonist, et pinnalained (täpsemalt nende omadused) sumbuvad sügavuse suurenedes – ja saavad täpse matemaatilise kirjelduse kinemaatilisest rajatingimusest mere põhjas.

Laine horisontaalse struktuuri määratlemisel tehakse veel üks põhimõtteline eeldus: oletatakse, et laine levib muutumatu kujuga. Selline, iseendast tegelikkusele vaid osaliselt vastav seisukoht võimaldab kahest-kolmest muutujast sõltuva (ning horisontaalstruktuuri esindava) funktsiooni asendada sisuliselt ühe muutuja funktsiooniga. See, tegelikult fundamentaalse tähtsusega samm, lülitab vaatluse alt välja suurema osa protsesse, mis toimivad piki laineharju. Edasine analüüs on tegelikult korrektne vaid ühemõõtmeliste, nn. tasalainete jaoks.

Järgmise sammuna kaasatakse rajatingimused Laplace'i võrrandi lahendamisel tekkinud integreerimiskoeffitsientide väärtuste täpsustamiseks. Neid on kaks ning nende rakendamine viib dispersiooniseoseni, mille omadused suurelt jaolt dikteerivad konkreetse laine klassi käitumist. Matemaatiliselt väljendab dispersiooniseos teatava võrrandisüsteemi lahenduvuse tingimust. Selle füüsikaline mõte on, et lainete parameetreid ei saa vabalt valida. Nimelt vastab alati konkreetsele lainevektorile kindel sagedus.

Pärast neid lihtsustusi on endiselt lahtine pinnalainete vertikaalset struktuuri peegeldavate koeffitsientide füüsikaline tähendus. Vaid lõpmata sügava vee puhul peab üks neist olema kindlasti null. Lõpliku sügavusega vees annavad rajatingimused koos dispersiooniseosega nende jaoks küll ühe tingimuse, kui teise koeffitsiendi valik on endiselt vaba. Sellisel vabadusel on aga sügav füüsikaline mõte: vaba koeffitsient esindab teatud mõttes laine amplituudi – mille määramine jäeti täielikult laine vertikaalset struktuuri peegeldava funktsiooni hooleks sel hetkel, kui laine horisontaalseid omadusi piisavalt adekvaatselt kirjeldavaks funktsiooniks loeti puhas (s.o. normeeritud) siinus või koosinus (mille amplituud on lihtsalt 1). Mõte ise on selles, et lineaarses laineteoorias ei ole laine amplituud üldse mitte kuidagi seotud laine pikkuse, sageduse, perioodi või leviku suunaga.

Analüüsi lõpetas tehniliselt ja algebraliselt natuke keerukas ja ebaülevaatlik teisenduste seeria, mille tulemusena jõudisime laine vertikaalset struktuuri kirjeldava funktsiooni klassikalise kujuni. Muidugi oli see jälle märksa lihtsam sügava vee puhul, kus kõik, mis vertikaalsuunas muutuda saab, kahaneb sügavuse suurenedes eksponentsiaalselt.

Vaatluse alt jäi praegu välja juht, mil laine vertikaalne struktuur muutub lineaarselt.

Analüüsi nähtav tulemus on analüütilised (kuigi veidi raskepärased) avaldised dispersiooniseose ja kiiruse potentsiaali jaoks. Kui esimene neist võimaldab määratleda suure hulga lainete omadusi vaid väheste teadaolevate või mõõdetud parameetrite kaudu, siis teise diferentseerimisel sobivate muutujate kaudu avalduvad nii kõik kiiruse komponendid, veepinna kuju kui ka rõhk veesambas.

Ühest küljest ei võimalda seni saadud tulemused otseselt kirjeldada ühtki realselt looduses esinevat lainevälja. Küll aga näitavad need oluliste seoste eksisteerimist pinnalainete erinevate parameetrite vahel. Samas on fundamentaalselt oluline asjaolu, et siinus- ja koosinusfunktsioonid rahuldavad pinnalainete matemaatilist ülesannet. Kuna mistahes perioodilist funktsiooni saab esitada Fourier' rea kaudu, avaneb nõnda võimalus mistahes tüüpi laine-alghäirituse käitumist analüüsida seda moodustavate siinus- ja koosinus(elementaar-)lainete leviku ja muutumise kaudu. Kuna ülesanne oli lineaarne, on nõnda võimalik lahutada mistahes laineväli elementaarlaineteks, vaadata, mis neist edasi saab, ja konstrueerida seejärel etteantud laine tulevik, summeerides jälle ajas ja ruumis edasi levinud ja muutunud elementaarlained. Tulemus on korrektne seni, kuni süsteem on lineaarne ja kehtib lineaarse superpositsiooni printsiip.