LINEAARSEID PINNALAINEID KIRJELDAV MATEMAATILINE ÜLESANNE

Klassikalise lainemudeli eeldused ja võrrandid

Pinnalainete (edaspidi lihtsalt lainete) matemaatiline kirjeldus on üldjuhul sügavalt mittetriviaalne ülesanne. Seetõttu kasutatakse rakendustes peamiselt klassikalist lineaarset mudelit, mis peegeldab küllalt hästi lainete omadusi (LeBlond ja Mysak, 1978, Massel, 1989). Selle aluseks on järgnevad eeldused:

- vee viskoossus on kaduvväike
- veepinna pindpinevusjõud on kaduvväike
- vee liikumine on keerisevaba (mittepööriseline)
- vee tihedus on konstantne
- lained on kahemõõtmelised
- vee pinnal paiknevad osakesed ei sukeldu ega eraldu ülejäänud veemassist
- vee vaba pinna jaoks esitatud rajatingimused tohib formuleerida rahuliku veepinna kõrgusel
- lained on nii väikese amplituudiga, et nende poolt indutseeritud kiiruse ruudu võib ära jätta.

Esimesed kaks eeldust on korrektsed lainete puhul, mille pikkus ületab 10 cm ehk kõigi käesoleva uurimuse seisukohalt huvi pakkuvate tuule- ja laevalainete puhul. Nende kahe eelduse tõttu saab lainete matemaatilisel kirjeldamisel piirduda vaid kahe välisjõuga: laineid tekitavad jõud (tuul või meres liikuvad objektid) ja gravitatsioonijõud, mis dikteerib tekkivate lainete käitumise seadused. Samuti on võimalik Navier-Stokesi võrrandite asemel (mis arvestavad vee viskoosssust) alustada analüüsi Euleri võrranditest ning tarvitada nende esimest integraali – Bernoulli võrrandit – ülesande lahendamisel.

Kui esimesed kaks eeldust kehtivad laia lainekõrguste vahemiku korral, siis pöörisevaba on lainetus vaid suhteliselt väikeste lainekõrguste korral, mil laine profiil on lähedane siinuslainele. Saab näidata, et siinuslained vee pinnal on keerisevabad (Komen et al, 1994); seega on lainete amplituudi väiksuse eeldus sisuliselt ekvivalentne keerisevabaduse eeldusega. Samuti on pöörisevaba liikumise eelduseks viskoossuse kõrvalejätmine.

Lineaarsete pinnalainete teooria eeldused: konstantne tihedus ja mittepööriseline liikumine

Pinnalainete tekkimise, levimise, murdumise ja sumbumisega seotud küsimuste analüüsil võib reaalsetes veekogudes vett lugeda kokkusurumatuks. Vee tihedus võib aga merede eri kohtades erineda soolsuse ja temperatuuri erinevuse tõttu. Tavaliselt muutub vee tihedus ookeanis pinnast põhjani 0.1% ringis. Läänemeres on tiheduse muutused vertikaalsihis palju suuremad, kuni 1%. Sellised muutused on pinnalainete omaduste analüüsil ebaolulised; küll aga saavad tänu tiheduse muutustele veemassides eksisteerida siselained. Pinnalainete analüüsi alustame seega eeldusel, et *vee tihedus* meid huvitavas basseinis *on konstantne*. Selles lähenduses taandub massi jäävuse seadus ehk pidevuse võrrand suhteliselt lihtsale kujule (1.8):

$$\operatorname{div}\vec{u} = 0 \text{ ehk } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\,. \qquad (2.1)$$

Vee liikumisi, mis rahuldavad võrrandit (2.1), nimetatakse selle tingimuse füüsikalise mõtte tõttu ka mittedivergentseteks ehk divergentsivabadeks (*nondivergent*).

Lained jõgedes, järvedes, meredes ja ookeanides, ühesõnaga kõigis reaalsetes veekogudes, levivad (i) teatava viskoossusega keskkonnas ning (ii) üldjuhul kogu aeg muutuva sügavusega vees. Seetõttu on pinnalainete (edaspidi lihtsalt lainete) matemaatiline kirjeldus üldjuhul sügavalt mittetriviaalne ülesanne. Nagu ülal näidatud, kirjeldavad vee liikumist meres Navier-Stokes'i võrrandid. Need on mittelineaarsed osatuletistega võrrandid, mille omaduste osas on veel mitmed aspektid ebaselged ning mille intensiivne analüüs jätkub veel tänapäeval. Pinnalainete levimisega muutuva sügavusega basseinis kaasnevad mitmed põnevad nähtused nagu lainete refraktsioon, difraktsioon, peegeldumine ja murdumine. Samuti modifitseeruvad lainete endi sellised olulised omadused nagu pikkus ja kõrgus. Neid nähtusi vaatleme lähemalt allpool. Pealegi on veekogu põhi on enamusel juhtudest mudane või liivane, seega kas reageerib lainelevile teataval määral või laseb osaliselt vett läbi. Nende protsesside kirjeldamine on omaette keerukas ülesanne. Mõningal määral käsitleme neid allpool, kuid siinkohal jätkame eeldusel, et põhi on kõva ning ei reageeri mingil moel lainete mõjule.

Navier-Stokesi võrrandite tuletamisel oli suurimaks probleemiks veeosakeste liikumise ebaühtluse tõttu tekkivate sisepingete adekvaatne kirjeldamine. Klassikalises hüdrodünaamikas peegeldab nende sisepingete mõju vedeliku liikumisele viskoosssus. Kuna see loetakse võrdeliseks veeosakeste kiiruse erinevusega, avaldub sisepingete mõju eelkõige tendentsina kiiruse gradientide vähenemise suunas. Teisisõnu, viskoossus „töötab" erinevate kiirustega liikuvate veeosakeste kiiruste ühtlustamise suunas. Kui veemass liigub tervikuna nii, et kõigi osakeste kiirused on võrdsed (s.o. kiiruse gradiendid on kõikjal nullid), ei teki vedeliku sees ka sisepingeid (mille mõju väljendub Navier-Stokesi võrrandites viskoossust sisaldava liikme kaudu) ning viskoossusel ei ole taolisele liikumisele mingit mõju.

Allpool näeme, et pinnalainete poolt indutseeritud kiiruste ruumiline muutlikkus on võrdlemisi tagasihoidlik. Teisisõnu, kiiruse gradiendid on päris väikesed praktiliselt kogu veemassis. Kuna ka merevee viskoossus on tagasihoidlik, on viskoossetest efektidest tingitud pinged veeosakeste tasemel väga väikesed ning enamusel juhtudest võib need lainelevi analüüsil jätta lihtsalt arvestamata. Taoline lähendus on täiesti adekvaatne nii-öelda vabas vees, põhjast kaugel, esinevate kiiruste muutlikkuse jaoks.

Erandiks on vaid basseini põhjas ja külgedel (randadel) asuvad võrdlemisi õhukesed kihid, kus laineleviga võivad kaasneda üsna suured kiiruse gradiendid. Liikumiste struktuuri neid kihtides käsitletakse nn. piirikihi teooria raames.

Vee viskoossuse ja sellest tulenevalt lainelevi käigus paratamatult tekkiva põhjahõõrde mõju lainelevile on paljudel praktilist huvi pakkuvatel juhtudel suhteliselt väike. Praegu eeldame lihtsuse mõttes, et veekogu põhi ja rannad on ideaalselt siledad ning ei takista mingil moel piki põhja liikuvaid veeosakesi. Teisisõnu, esimeses lähenduses (st. lainete põhiliste omaduste vaatlemisel) *jätame põhjahõõrde mõju arvestamata*.

Selle pealtnäha tagasihoidliku ja mõistliku eeldus võimaldab edasise käsitluse jaoks teha fundamentaalse lihtsustuse. Nimelt osutub vedeliku liikumine praktiliselt mittepööriseliseks selles veemassi osas, kus viskoossete efektide mõju on tingitud vaid lainelise liikumise enda poolt indutseeritud kiiruse gradientidest. Liikumine on tugevalt pööriseline vaid õhukestes piirikihtides, mis lahutavad lausa kareda põhja või ranna vastas paiknevaid veeosakesi, mille liikumine oluliselt takistatud, nii-öelda vabas vees esinevates liikumistest. Teisisõnu, kui lainete amplituud on suhteliselt väike võrreldes veekogu sügavusega ja lainepikkusega, on praktiliselt kogu lainelevist hõlmatud veemassis liikumine mittepööriseline.

See eeldus on pealtnäha vastuolus tuntud asjaoluga, et veeosakesed laines liiguvad mööda ringjoone- või ellipsikujulisi trajektoore, mida tavaliselt peetakse keeris(t)e olemasolu tunnuseks. Siiski on veeosakeste liikumine laines pöörisevaba, kuna veeosakeste orientatsioon trajektoori eri punktides ei muutu. Keerises liikuva veeosakese orientatsioon muutub täisringi tegemisel 360° (s.o. veeosake teeb täispöörde ka ümber oma telje), kuid näiteks vee pinnal lebava pilpa orientatsioon jääb samaks, kuigi pilbas liigub mööda ellipsikujulist trajektoori. Pöörisevaba liikumist võib interpreteerida ka sellisena, mis ei põhjusta keskkonna osakeste omavahelise asendi püsivat deformeerumist.

Laplace'i võrrand

Liikumise *mittepööriselisuse* eeldus lihtsustab drastiliselt lainetuse omaduste analüüsi ning tegelikult on lineaarsete pinnalainete omaduste analüüsi üks nurgakivisid. Sellisel juhul eksisteerib mingi skalaarne funktsioon (potentsiaal) $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$, mille osatuletiste kaudu avalduvad veeosakeste kiiruse $\vec{v}(x, y, z, t)$ komponendid u, v, w:

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \ w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{2.2}$$

Muidugi eksisteerib sel juhul ka voolufunktsioon, kuid sellel asjaolul on lainetuse teoorias väiksem roll. Põhimõtteline lihtsustus on siin loomulikult selles, et kolme funktsiooni (kiiruse komponendi) leidmiseks piisab vaid ühe funktsiooni teadmisest. Teisisõnu, kolmest võrrandist koosneva Navier-Stokesi süsteemi saab vaadeldaval juhul asendada üheainsa võrrandiga.

Miinusmärk valemites (2.2) väljendab lihtsalt seda, et kiirus on positiivne siis, kui potentsiaal kahaneb. Matemaatilises mõttes pole vahet, kas valida neis seostes miinusvõi plussmärgid, ent muidugi peab valik olema tehtud süstemaatiliselt ühe või teise märgi kasuks.

Seosed (2.2) võimaldavad avaldada kiiruse komponendid u, v, w potentsiaali φ kaudu. Asendades need pidevuse võrrandisse (2.1), saame tulemuseks *Laplace'i võrrandi*

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\Delta\varphi=0\,. \tag{2.3}$$

Laplace'i operaator Δ esitatakse sageli ka divergentsi skalaarkorrutisena $\Delta=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$.

Laplace'i võrrandil on lõpmata palju lahendeid nagu on tavaline osatuletistega diferentsiaalvõrrandite puhul. Seejuures on huvitav märkida, et Laplace'i võrrandil lõpmatus piirkonnas või jäiga rajaga piirkonnas pole lainelahendeid. Tõepoolest, näiteks ühemõõtmelisel juhul on võrrandil (2.3) kuju $\varphi''(x,t)=0$, millest $\varphi(x,t)=C_1(t)x+C_2(t)$ ning x-telje suunas levivaid perioodilisi lahendeid ei eksisteeri. Ette rutates mainime, et pinnalainete poolt indutseeritud liikumisi kirjeldava matemaatilise ülesande Laplace'i võrrandi lainelahendid eksisteerivad ainult tänu vaba veepinna olemasolule.

Ühe- ja kahemõõtmelised lained, voolufunktsioon ja lineaarsus.

Vee pinnal on sageli tegemist situatsiooniga, mil lained levivad ühes suunas ning nende harjad on väga pikad. Kui valida koordinaatteljestik nõnda, et y-telg on suunatud piki laineharju, on nii veepinna häiritused, rõhk veesamba erinevates punktides ning veeosakeste kiirused praktiliselt sõltumatud y-koordinaadist. Samuti on ka y-telje suunaline kiiruse komponent null. Sellisel juhul on mõttekas vaadelda lainet ühemõõtmelisena ehk tasandilistena (*one-dimensional wave, planar wave*, kasutatakse ka nimetusi tasaparalleelne laine ja tasalaine).

Pinnalainete puhul on tegemist häiritustega kahemõõtmiselil veepinnal, mistõttu vajab dimensioonide küsimus kindlasti selgitust. Nimetus "ühemõõtmeline" on siin seotud sellega, et pinnalainete leviku suund on määratud veekogu pinnal ehk teataval tasandil. Selle poolest erinevad pinnalained näiteks heli- või elektromagnetlainetest, mis võivad ruumis levida mistahes suunas ning mis kujutavad endast üldiselt kolmemõõtmelisi laineid.

Ühemõõtmelised pinnalained panevad küll liikuma kogu kolmemõõtmelise veemassi; et aga liikumise omadused on mingis kindlas suunas (piki laineharju) konstantsed ning sellesuunaline kiiruse komponent on null, sõltub kiirusväli vaid kahest ruumi koordinaadist ning järelikult on matemaatilises mõttes kirjeldatav kahemõõtmelisena (x,z)-tasandil.

Formaalselt nimetatakse ühemõõtmelisteks selliseid lainesüsteeme, mille puhul saab koordinaatide süsteemi valida nõnda, et nii lainete kui terviku kui ka keskkonna osakeste liikumise omadused ei muutu y-telje suunas. Sobivalt valitud teljestikus on siis ka y-suunaline liikumise component null. Reaalses mitmemõõtmelises keskkonnas ei ole asjad siisk nii lihtsad, et teist horisontaalmõõdet saaks alati ingoreerida. Tegelikult ei eksisteeri perfektselt ühemõõtmelisi pinnalainete süsteeme Nii kaasnevad ka lõpmata pikkade harjadega lainete leviga teatavad materiaalsed vood piki laineharju. Näiteks lainelevi poolt indutseeritud impulsi voog y-telje suunas on nullist erinev ka siis, kui lained liiguvad vaid x-telje suunas ja on lõpmata pikkade harjadega. Neid küsimusi vaatleme kiirguspinget ja laineleviga kaasneva impulsi levimist käsitlevates peatükkides kursuse lõpuosas.

Konstantse tihedusega keskkonnas levivate pinnalainete puhul rahuldavad tekkivad veeosakeste liikumised pidevuse võrrandit kujul (2.1), teisisõnu, tekkiv liikumine on divergentsivaba. Ühemõõtmeliste lainete puhul on kiirusväli kahemõõtmeline ning tingimus $div\,\vec{v} = 0$ garanteerib voolufunktsiooni $\psi(x,z)$ eksisteerimise. Vastavalt voolufunktsiooni definitsioonile avalduvad vee kiirused kujul

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{2.4}$$

Kahemõõtmeline liikumine on aga mittepööriseline parajasti siis, kui

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \tag{2.5}$$

Seoste (2.4) ja (2.5) asendamine Laplace'i võrrandisse annab nüüd:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} w + \frac{\partial}{\partial z}(-u) = 0. \tag{2.6}$$

Kui voolamine oleks pööriseline, siis oleks võrrandil (2.6) kuju

$$\Delta \varphi = \Omega, \tag{2.7}$$

kus Ω on pööris. Nii nagu kolmemõõtmelise mittepööriselise voolamise puhul, kehtib Laplace'i võrrand (või võrrand (2.7)) kogu veemassis.

Laplace'i võrrandi, voolufunktsiooni ja kiiruse potentsiaali omavaheliste suhete kohta on siin paslik teha mõned kommentaarid.

Kiiruse potentsiaal võib eksisteerida väga mitmesuguste kahe- ja kolmemõõtmeliste voolamiste puhul. Seevastu voolufunktsioon on üldiselt kahemõõtmelise voolamise omadus. Kolmemõõtmeliste voolamiste puhul eksisteerib voolufunktsioon vaid telgsümmeetriliste voolamiste puhul. Kuigi pinnalainete tekitatud liikumine tervikuna on kolmemõõtmeline, on vaadeldaval juhul – kui voolamise omadused on muutumatud ühe telje sihis – matemaatilises mõttes tegemist kahemõõtmelise voolamisega (x,z)-tasandil, mistõttu voolufunktsiooni eksisteerimine ei ole seotud telgsümmeetrilisuse piiranguga.

Kuna kiirusväli pinnalainetes ei ole telgsümmeetriline, et ole voolufunktsiooni kontseptsioon üldiselt kasutatav olukordades, kus lainetuse omadused muutuvad piki laineharju, näiteks situatsioonides, kus lained saavad levida erinevates suundades, aga ka lühikeseharjaliste lainesüsteemide puhul. Teisisõnu, voolufunktsiooni omadustel põhinevad lainetuse dünaamika võtted on kasutatavad vaid praktiliselt ühemõõtmeliste laineväljade analüüsil.

Edasise analüüsi jaoks keskne moment seisneb selles, et Laplace'i võrrand on lineaarne. See sisaldab küll otsitava funktsiooni kõrgemaid tuletisi, kuid mitte selle funktsiooni või selle tuletiste korrutisi või muid keerukamaid avaldisi). Seetõttu kehtib juhul, kui see võrrand kirjeldab liikumisi kogu ruumis (s.o. rajatingimusi ei seata), selle võrrandi lahendite (lineaarse) superpositsiooni omadus: kui funktsioonid φ_1 ja φ_2 rahuldavad seda võrrandit, siis ka mistahes funktsioon $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$, kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid, on samuti Laplace'i võrrandi lahend. Teisisõnu, mistahes kahe selle võrrandiga kirjelduva häirituse superpositsioon (sh. lainete summa ja vahe) on sama tüüpi häiritus.

Kui aga Laplace'i võrrandile lisanduvad rajatingimused, siis on nõue lineaarsusele keerukam: lahendite lineaarne superpositsioon peab rahuldama ka rajatingimusi. Seega on lineaarsete lainete puhul vajalik ka rajatingimuste lineaarsus.

Nimelt selle omaduse tõttu (ja mitte laineid kirjeldavate avaldiste kuju alusel) nimetatakse Laplace'i võrrandit rahuldavaid pinnalaineid lineaarseteks laineteks. Muu hulgas tähendab lainete lineaarsus seda, et erinevate lainete poolt indutseeritud keskkonna häiritused (veepinna asend, veeosakeste kiirused) lihtsalt liituvad.

Rajatingimused

Nagu diferentsiaalvõrrandite puhul tavaline, võivad Laplace'i võrrandit rahuldada väga erinevad funktsioonid, millest enamusel pole mingit tegemist pinnalainetega. Pinnalaineid kirjeldavad lahendid määratletakse just nende lainete tekkimist, levikut ja sumbumist kirjeldavate füüsikaliste tingimuste alusel. Harilike diferentsiaalvõrrandite puhul piisab lahendi üheseks määratlemiseks üldiselt algtingimustest ehk otsitava funktsiooni ja selle tuletiste väärtuste teadmisest kindlas punktis ja/või ajahetkel. Laplace'i võrrand esindab aga osatuletistega diferentsiaalvõrrandeid, kirjeldades kiiruse potentsiaali sõltuvust ajast ja kolmest ruumikoordinaadist teatavas vedelikuga täidetud piirkonnas. Sellise ülesannete puhul on nii lahendi eksisteerimise kui ka ühesuse küsimused märksa keerukamad.

Mõistlike tulemuste saamiseks on üldiselt tarvis kõigepealt formuleerida piirkond, milles lahendit otsitakse (või milles lahendil on mingi mõte, vt. Dean&Dalrymple, WWM, joonis 3.1). Kui vesi täidaks kogu kolmemõõtmelise ruumi, ei oleks pinnalained võimalikud juba selle tõttu, et vee pinda poleks olemas. Selle piirkonna raja erinevates osades võivad kehtida vägagi erinevad reeglid, mis tuleb mingite füüsikaliste või matemaatiliste kaalutluste alusel formaliseerida rajatingimuste näol. Seega tuleb osatuletistega diferentsiaalvõrrandite puhul üldiselt lahendada rajaülesanne. Alles siis on mõtet asuda liikumist tekitavate mehhanismide kirjeldamise või vaadeldavasse piirkonda mujalt saabuvate häirituste esitamise kallale (juhul, kui liikumisvõrrand ei sisalda tuletisi aja järgi), või siis algtingimuste formuleerimise juurde (juhul, kui vastav võrrand kirjeldab ka süsteemi ajalist evolutsiooni).

Kuna pinnalained levivad mingis veekogus vee ja atmosfääri piiril, on esmane keerukuse allikas asjaolu, et veepinna kuju ei ole ette teada, vaid selle leidmine moodustab osa ülesande lahendamise protsessist. Seetõttu tuleb ette anda vaid teatavad üldised reeglid, mida veepinnal paiknevad veeosakesed (või nende liikumine) peab rahuldama.

Paljudel juhtudel panevad pinnalained liikuma kogu veemassi. Seetõttu peavad rajatingimused kindlasti määratlema, milline on vee liikumise spetsiifika veekogu põhjas ning millised reeglid kehtivad vee pinnal. Veekogu põhi võib olla keeruka struktuuriga, tavaliselt keeruka kolmemõõtmelise geomeetriaga ning nii ruumis kui ka ajas muutuvate omadustega. Selle kursuse raames eeldatakse enamasti, et põhi on libe ja jäik ning ei muutu ajas. Kursuse lõpuosas vaadeldakse lühidalt mõningaid dünaamiliselt muutuva põhjaga seonduvaid küsimusi.

Juhul, kui tegemist on lõpliku suurusega veekoguga, tuleb kirjeldada ka reeglid, mille järgi käituvad lained rannal. Kui aga vaadeldakse mingis osa suuremast veekogust, on vajalik määratleda, kuidas käsitleda väljastpoolt saabuvaid häiritusi ning mis saab neist lainetest, mis vaadeldavast alast lahkuvad. Ülesande lõplikuks lahendamiseks tuleb veel kirjeldada mingil ajahetkel (näiteks $t = 0$) eksisteeriv lainesüsteem kiirusväljade täpse kaardi kaudu.

Toodud kirjeldusest on selge, et pinnalaineid kirjeldava matemaatilise ülesande formuleerimine on võrdlemisi keerukas ettevõtmine. Seetõttu vaatleme selle üksikuid samme ja nende taga seisvaid füüsikalisi printsiipe võrdlemisi detailselt.

Kinemaatilised rajatingimused

Laplace'i võrrand kirjeldab sisuliselt veeosakeste kiiruste käitumist veega täidetud piirkonnas, seega tuleb kindlasti formuleerida piirangud või tingimused veeosakeste kiirustele kõigil veemassi rajadel, seega nii veekogu põhjas kui ka vee pinnal. Juhul, kui vaadeldakse osa suuremast veekogust, tuleb lisada ka tingimused kiiruste jaoks vaadeldava osa ja ülejäänud veekogu rajal. Sellist laadi tingimusi nimetatakse füüsikaliste ülesannete puhul kinemaatilisteks rajatingimusteks (*kinematic boundary conditions*). Nende sisuline mõte on tagada, et vesi ei voolaks läbi vaadeldava piirkonna raja; vähemalt mitte süstemaatiliselt ja suurtes kogustes, sest siis poleks enam tegemist ei lainelevi ülesandega ega konkreetses veemassi ja muu maailma vahelise rajaga, vaid pigem hoovuste analüüsiga. Veekogu põhjas ja vee pinnal on taoline loogika elementaarne: üldiselt ei imbu ookeani vesi kuigivõrd põhjasetetesse ning ei paisku pinnalt atmosfääri. Kui aga analüüsitakse lainetuse omadusi mingis eraldatud veekogu osas, on taoliste tingimuste korrektne formuleerimine üsna keerukas ning vahel lausa võimatu. Käesolevas kursuses taolisi peensusi me siiski ei vaatle.

Kinemaatilised rajatingimused formuleeritakse tavaliselt nende võrrandite alusel, mis kirjeldavad vaadeldava veemassi raja konkreetse osa funktsioneerimist. Mistahes fikseeritud või muutuvat (dünaamilist) raja saab meie kolmemõõtmelises maailmas matemaatiliselt kirjeldada mingi nelja muutuja funktsiooniga $R(x, y, z, t) = 0$. Jäiga merepõhja puhul ei sõltu see funktsioon ajast ning enamasti esitatakse kujul $h = h(x, y)$. Siledat horisontaalset merepõhja kirjeldab lihtsaim taoline seos $h = h_0$, kus h_0 on teatav konstant. Ajas muutuva raadiusega $r(t)$ silindrilise veemassi raja taolises meres esitub aga seosega $x^2 + y^2 - r^2(t) = 0$.

Kuna veepinna asend muutub lainete mõjul, kujutab mere pind endast ilmselt ajas muutuvat raja. Jätame siinkohal kõrvale nii murdlainetuse kui ka ekstreemse tormilainetuse, mil veepinna ja õhu eralduspiir on võrdlemisi raskesti määratletav, ning piirdume juhuga, mil lained on lauged ning veepind kirjeldub mingi pidevalt diferentseeruva funktsiooniga. Taolisel juhul eeldatakse, et veepind koosneb alati ühtedest ja samadest veeosakestest, mida vastavalt lainete levikule välja venitatakse ja kokku surutakse. Sellist laadi veepind on interpreteeritav ka lõpmata õhukese elastse kilena. Sageli kasutatakse sel puhul formuleeringut, et pinnal paiknevad veeosakesed ei sukeldu, vaid liiguvad koos veepinnaga. Teisisõnu, sisuliselt eeldatakse, et pinnal paikneva veeosakese kiirus on võrdne veepinna liikumise kiirusega.

Pinna elementide liikumise kiirus ei sisaldu ilmutatud kujul raja ennast kirjeldavas võrrandis, küll aga selle täistuletises. Iga punkti jaoks, mis liigub koos rajaga, on raja kirjeldav funktsioon $R(x,y,z,t)$ konstantse väärtusega (rajal paiknevate punktide jaoks null); seega selle täistuletis peab olema null. Ajas muutuva raja (resp. veepinna) elementide liikumist kirjeldab seega võrrand

$$\frac{DR(x,y,z,t)}{Dt} = 0 = \left(\frac{\partial R}{\partial t} + u\frac{\partial R}{\partial x} + v\frac{\partial R}{\partial y} + w\frac{\partial R}{\partial z} \right)_{R(x,y,z,t)=0} . \tag{2.8}$$

Kiiruse komponendid (u,v,w) iseloomustavad nii raja mingi punkti kiirust kui ka – vastavalt tehtud eeldusele – ka rajaga vahetult piirneva või rajal paikneva veeosakese kiirust. Sellele seosele saab anda lihtsama kuju kiirusvektori $\vec{u} = (u,v,w)$ ja vektori $\vec{\nabla} R$ või vastava ühikvektori $\vec{n} = \vec{\nabla} R \big/ \left|\vec{\nabla} R\right|$ abil:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} R = \frac{\partial R}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{n}\left|\vec{\nabla} R\right| = 0 \text{ rajal } R(x,y,z,t) = 0 , \tag{2.9}$$

kus vektori $\vec{\nabla} R$ pikkus avaldub klassikalise seosega

$$\left|\vec{\nabla} R\right|^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2 \tag{2.10}$$

Vektorkujul esitatud seos (2.9) võimaldab anda kinemaatilisele rajatingimusele lihtsa füüsikalise interpretatsiooni. Kui $\vec{u} = (u,v,w)$ on mingi punkti kiirus ja $\vec{n}$ mistahes ühikvektor, siis $\vec{u} \cdot \vec{n}$ on selle punkti kiirus projektsioon vektori $\vec{n}$ sihis, ehk lihtsamalt öeldes vektori $\vec{n}$ sihiline kiiruse komponent[1]. Edasi, kui piirkonna raja on esitatud funktsiooniga $R(x,y,z,t) = 0$, siis selle funktsiooni gradientvektor $\vec{\nabla} R$ on kõnesoleva rajaga risti. Teisisõnu, vektor $\vec{\nabla} R$ on raja normaalvektor. Seega esitab tingimus (2.9) seose rajal paiknevate punktide normaalisuunalise kiiruse ja raja enese asendi lokaalse muutumise kiiruse $\partial R/\partial t$ vahel.

Juhul, kui raja asend ei muutu, nagu see on tüüpiline merepõhja puhul, taandub tingimus (2.9) seosele $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, mille füüsikaline mõte on selles, et raja normaali sihiline veeosakeste kiiruse komponent on null. Lihtsamalt öeldes: kui raja asend ei muutu, peab sellise rajaga piirnevate veeosakeste kiirus olema suunatud piki raja moodustavat pinda (täpsemalt, olema selle pinna mingi puutuja sihis).

Selle loogika alusel saame formuleerida rajatingimuse veekogu põhjas ja randades. Juhul, kui neid pindu võib lugeda jäigaks, siledaks ja liikumatuks pinnaks, peab otse nende vastas paiknevate veeosakeste kiirus olema suunatud piki põhja. Lihtsaimal juhul, mil põhi on horisontaalne, on otse põhjas paiknevate vertikaalkiirus w null ehk

[1] See mõte on elementaarne, kui $\vec{n}$ on mingi koordinaattelje suunaline ühikvektor. Kui see on näiteks z-telje suunaline vektor $(0,0,1)$, on $\vec{u} \cdot \vec{n} = w$. Mistahes vektori $\vec{n}$ puhul võib taoline mõtteviis vajada veidi harjumist, aga edasise materjali mõistmise huvides peaks sellega tegelema.

$$\omega = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=-H} = 0\,. \tag{2.11}$$

Teisiti tuleb fomuleerida rajatingimus juhul, kui vaatleme väga sügavat merd. Siin aitab meid kogemus, mille kohaselt pinnalainete pooli indutseeritud vee kiirused kahanevad sügavuse suurenedes üpris kiiresti. Seetõttu on loogiline oletada, et lõpmata sügavas vees kahaneb vertikaalkiirus nullini ehk

$$\omega = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=-\infty} = 0\,. \tag{2.12}$$

Huvitav on märkida, et sellest tingimusest piisab ülesande lahendamiseks ning ei teki vajadust tingimuste formuleerimiseks kiiruse horisontaalkomponentide jaoks. Märgime veel, et allpool kasutame mõistet 'sügav vesi' tähistamaks olukorda, kus lainete omadused praktiliselt ei sõltu vee sügavusest; selle mõiste sisu käsitletakse lähemalt järgmises jaotuses.

Pinnalainete korrektseks matemaatiliseks kirjeldamiseks tuleb teha veel üks eeldus, nimelt, et pinnal asuvad veeosakesed püsivad pinnal ning 'sukelduvad' harva. Tegelikkuses kehtib see eeldus üsna hästi, välja arvatud juhul, kui lained murduvad, millisel juhul voolamine pole enam keerisevaba. Kui see eeldus kehtib, võib veeosakeste liikumise vertikaalkiiruse vee pinnal lugeda võrdseks veepinna vertikaalliikumise kiirusega. (Juhul, kui pinnal asuvad veeosakesed vahel ‚sukelduksid', ei peaks selline seos paika). Vastasel juhul ei õnnestuks lihtsate kaalutluste alusel seostada veepinna liikumise omadusi seda moodustavate veeosakeste liikumisega.

Kui nimetatud eeldus on adekvaatne, saame pinnal paiknevate veeosakeste liikumise kiiruse siduda veepinna enda liikumise kiirusega rajal $z = \eta(x, y, t)$ (teisisõnu, $R(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t)$) seosest (2.9):

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - u\frac{\partial \eta}{\partial x} - v\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \text{ ehk } w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\frac{\partial \eta}{\partial y} \text{ rajal } z = \eta(x, y, t). \tag{2.13}$$

Saadud tingimust nimetatakse *kinemaatiliseks rajatingimuseks vee vabal pinnal*.

Loetletud tingimustest ei piisa ülesande korrektseks seadeks. Matemaatilises mõttes avaldub mittepiisavus selle kaudu, et ülesandesse on tekkinud uus tundmatu funktsioon - vaba vee pind $z = \eta(x, y, t)$. Füüsikalises mõttes tuleb peale juba kirjeldatud tingimuste veel formuleerida veel mingid reeglid, mille järgi käitub vesi pinnal; samas ei tohi kitsendada füüsikaliselt võimalikke vee liikumise vorme. Seetõttu saab taolisi tingimuse seada vaid teataval moel üldistatuina.

Loogiliseks reegliks on, et vabal vee pinnal on kõikjal võrdne atmosfäärirõhk sõltumatult sellest, millise kujuga on veepinna häiritused või millise kiirusega need või veeosakesed liiguvad. Eelmises peatükis selgus, et rõhu ja kiiruse universaalne seos avaldub Euleri võrrandite esimese integraali - Lagrange'i-Cauchy integraali ehk Bernoulli võrrandi kaudu (1.46). Kuna käesolevas analüüsis eeldame, et liikumine on pöörisvaba, kuid mittestatsionaarne, on Bernoulli võrrandil järgmine kuju (1.52):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz = F(t)\,, \tag{2.14}$$

kus $F(t)$ on mingi vaid ajast sõltuv funktsioon, mis on konstantne kogu vedelikuga täidetud alas. Oluline on asjaolu, et võrrandiga (2.15) esitatud seos kehtib kogu vedelikuga täidetud alas, ka siis, kui selle ruumala piirid muutuvad. Nõnda on Bernoulli funktsioon igati sobiv kandidaat iseloomustama selliseid vedeliku liikumisi, mille kuju ja kiirused on tundmatud ning mis võivad kuitahes suurel määral modifitseerida vedelikuga täidetud ruumala kuju. Kaudselt kasutasime seda omadust paagist välja voolava vedeliku kiiruse arvutamisel.

Eeldusel, et vee tihedus on konstantne, saame integraalliikme võrrandis (2.15) esitada kujul

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho}\int dp = \frac{1}{\rho}(p - p_0), \tag{2.15}$$

kus p_0 on integreerimiskonstant. Paljudes käsitlustes loetakse see võrdseks atmosfäärirõhuga. Tegelikult pole pinnalainete ülesande lahendamiseks selle täpne väärtus üldse tähtis. Samuti pole oluline funktsiooni $F(t)$ iseloom. Mõlemad suurused saame käsitlusest elimineerida, vaadeldes potentsiaali φ asemel funktsiooni

$$\hat{\varphi} = \varphi - \frac{p_0}{\rho} + \int_{t_0}^{t} F(t)dt\,. \tag{2.16}$$

On lihtne kontrollida, et ka funktsioon $\hat{\varphi}$ on kiiruse potentsiaal. See omadus peegeldab lihtsalt asjaolu, et kiiruse potentsiaal pole üheselt defineeritud. Kuna kiirused avalduvad potentsiaali osatuletistena ruumi koordinaatide järgi, on taolised osatuletised samad ka siis, kui potentsiaalile liita mistahes vaid ajast sõltuv funktsioon.

Toodud arutlusest järeldub, et tohime Bernoulli võrrandi (2.15) kirjutada kujul:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + gz + \frac{p - p_0}{\rho} = 0, \tag{2.17}$$

kus z-telg on suunatud vertikaalselt ülespoole, $g \approx 9.81$ m/s^2 on raskuskiirendus, ρ on vedeliku tihedus, p on rõhk ja p_0 on atmosfääri rõhk vee pinnal. Võrrandist (2.17) saab arvutada rõhu p igas vee punktis ja igal ajamomendil niipea, kui potentsiaal φ on leitud.

Kuna see võrrand kehtib kõikjal, kus vedelik paikneb või liigub, võimaldab see lõplikult formuleerida pinnalainete matemaatilise rajaülesande. Seost (2.17) vee pinnal

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + gz + \frac{p - p_0}{\rho}\right|_{\eta=\eta(x,y,t)} = 0, \tag{2.18}$$

nimetatakse pinnalainete rajaülesande *dünaamiliseks rajatingimuseks vee vabal pinnal*.

Huvitav on märkida omapärast võrrandite transformeerumist käesoleva ülesande analüüsil. Vee liikumist kirjeldab pidevuse võrrandist pöörisevaba liikumise jaoks tuletatud Laplace'i võrrand. Seevastu Newtoni (impulsi jäävuse) võrranditest pärinevad vee liikumise võrrandid on kasutusel hoopis kirjeldamaks veepinna dünaamika teatavaid aspekte.

Rajatingimuste lineariseerimine

Üldkujul on nii kinemaatiline kui ka dünaamiline rajatingimus mittelineaarsed. Lisaks on need formuleeritud vee pinnal, mille kuju või asend konkreetses punktis või ajahetkel on teadmata.

Lahenduskäigu lihtsustamine on võimalik nende tingimuste lineariseerimise kaudu. Teisisõnu, esimeses lähenduses jäetakse ära neis sisalduvad väikesed mittelineaarsed liikmed ning formuleeritakse need tingimused rahuliku veepinna tasemel $z = 0$.

Mittelineaarsete liikmete ärajätmine on võimalik vaid siis, kui lainete amplituudid on väikesed. Vaid siis on väikesed ka veepinna osakeste horisontaalsuunalised kiirused ja veepinna kalle $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ mistahes suunas. Seetõttu võib tingimuses (2.13) jätta ära liikmed $u\frac{\partial \eta}{\partial x}$ ja $v\frac{\partial \eta}{\partial y}$.

Kuna veepinna häiritus tasakaaluasendist on samuti väike, seatakse esimeses lähenduses tingimus (2.13) mitte täpselt vabal veepinnal, vaid rahuliku veepinna kõrgusel:

$$\left.\frac{\partial \eta(x, y, t)}{\partial t}\right|_{z=0} \cong w\big|_{z=0} \cong \left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=0}. \qquad (2.19)$$

Dünaamilise rajatingimuse lihtsustamine toimub analoogiliselt. Juhul, kui vaadeldakse ainult väikese amplituudiga liikumisi, on suurus $u^2 + v^2 + w^2$ teiste liikmetega võrreldes väike ning Bernoulli võrrand kogu veemassis (2.17) lihtsustub kujule

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz + \frac{p - p_0}{\rho} = 0. \qquad (5)\ (2.20)$$

See võrrand kehtib, nagu enne märgitud, kogu vedeliku ruumalas. Kirjeldagu vaba vee pinna käitumist hetkel tundmatu funktsiooni $\eta = \eta(x, y, t)$. Vee pinnal on rõhk $p = p_0$, nagu ülal selgitatud, võrdne atmosfäärirõhuga, mistõttu võrrandist (2.20) järeldub et vee vabal pinnal kehtib seos

$$g\eta + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{z=\eta} = 0. \qquad (6)\ (2.21)$$

Nii nagu kinemaatilise rajatingimuse lihtsustamisel, eeldatakse ka siin, et lainete amplituud on väike. Seetõttu on ka veepinna kõrvalekaldumine tasakaaluasendist väike ning kehtib ligikaudne võrdus

$$g\eta + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{z=0} = 0 \qquad (7)\ (2.22)$$

ja funktsioon η avaldub kujul

$$\eta(x, y, t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t}. \qquad (8)\ (2.23)$$

Seostest (2.19) ja (2.23) on nüüd lihtne elimineerida vaba veepinna asendit kirjeldav tundmatu funktsioon $\eta = \eta(x, y, t)$. Selleks piisab, kui väljendada selle osatuletis aja järgi rahuliku veepinna tasemel (mis sisaldub võrrandis (2.19)) mingi muu meie ülesandes sisalduva funktsiooni kaudu.

Selleks diferentseerime võrrandit (2.23) aja järgi. Selle operatsiooni lubatavusest (matemaatilises mõttes) hiilivad paljud pinnalainete teooria käsitlused kõrvale. Diferentseerimine on korrektne vaid selle tõttu, et seose (2.23) aluseks olev Bernoulli võrrand kehtib kogu vedelikuga täidetud alas. Seetõttu võib aja järgi diferentseerida juba võrrandit (2.17). Saadud seose lineariseerimine viib võrrandiga (2.20) analoogilise tingimuseni, mis jällegi kehtib kogu vedelikuga täidetud alas. Kui seejärel kasutada eeldust, et lainete amplituudid on väikesed, jõuame seose (2.22) analoogini funktsiooni $\eta = \eta(x, y, t)$ tuletise jaoks:

$$\frac{\partial \eta(x, y, t)}{\partial t} = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial^2 \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t^2} \right|_{z=0} . \qquad (10)\ (2.24)$$

Asendades saaadud seose tingimusse (2.19), saame tulemuseks ühe rajatingimuse:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} + \frac{1}{g} \left. \frac{\partial^2 \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t^2} \right|_{z=0} = 0 . \qquad (11)\ (2.25)$$

Teostatud analüüsi tulemusena oleme jõudnud lineaarsete pinnalainete levikut horisontaalsete piirideta ning horisontaalse libeda ning jäiga põhjaga basseinis kirjeldava matemaatilise ülesandeni. See koosneb Laplace'i võrrandist (2.3), rajatingimusest vabal veepinnal (2.25) ja rajatingimusest veekogu põhjas (2.11) või (2.12). Otsitavaks funktsiooniks on kujunenud kiiruse potentsiaal $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$. Selle leidmisest piisab ülesande täielikuks lahendamiseks. Veeosakeste kiiruse $\vec{v}(x, y, z, t)$ komponendid u, v, w mistahes ajahetkel ja mistahes punktis saab leida lihtsalt kiiruse potentsiaali diferentseerimise teel ruumi koordinaatide järgi. Veepinna kuju saab leida seosest (2.23), diferentseerides potentsiaali aja järgi ning jagades tulemuse raskuskiirendusega.

Ülesande täielikuks lahendamiseks on tarvis ette anda veel algtingimused, näiteks kiiruste ja kiirenduste jaotused, või potentsiaali jaotus $\varphi(x, y, z, 0) = f_1(x, y, z)$ mingil ajahetkel. Lainete põhimõtteliste omaduste analüüsil on need (alg)tingimused ebaolulised.

Seni teostatud analüüs kehtib lainevälja jaoks, kus ei seata mingeid piiranguid lainelevi suuna või laineharjade pikkuse jaoks. Lõviosa lineaarsest laineteooriast arendatakse aga tasalainete jaoks – lõpmata pikkade harjadega sisuliselt ühemõõtmeliste lainete jaoks. Selline lähendus on looduslike lainete puhul rakendatav lokaalselt, kuna laineharjad on üldiselt lõpliku pikkusega. Mitmetel juhtudel, sh. ummiklainete, tsunami ning sageli ka laevalainete puhul kirjeldab see üsna hästi tegelikku lainepilti. Sellises laines toimub vee liikumine ainult laine leviku suunalises vertikaaltasandis ning laineharjaga risti olev kiiruse komponent on null. Kui valida koordinaatteljestik nõnda, et laine levib x-telje sihis ning lainehari on paralleelne y-teljega, saame, et $v(x, y, z, t) \equiv 0$ ning laine omaduste sõltuvust y-koordinaadist ei tule arvestada.