

## Vee liikumise võrrandid

Vee liikumine, ükskõik kui keerukas see ka paistab, toimub meie universumis kehtivate loodusseaduste järgi. Seetõttu on loogiline kasutada vastavate võrrandite tuletamiseks algprintsiipe. Neid on vaid vaid väike arv. Meid huvitavate nähtuste kirjeldamiseks saab neist kasutada massi jäävuse seadust ja Newtoni teist seadust (mille kohaselt impulsi muutumise kiirus on võrdne kehale mõjuva jõuga).

Need seadused võimaldavad kirjeldada korrektselt ideaalsete punktmasside liikumist seni, kuni kehad omavahel kokku ei puutu. Kehade pörkimise ehk interaktsiooni korral tuleb arvestada ka kehade muude omadustega nagu nende geomeetria ja materjali omadused.

Vee liikumine erineb ideaalsete kehade dünaamikast selle poolest, et veosakesed paiknevad tavatingimustes alati üksteisega kontaktis. Seetõttu kõneldakse vee liikumise puhul pideva keha mehaanikast ja dünaamikast. Nii nagu mehaaniliste kehade pörgete puhul, on tarvis mingil moel kirjeldada veosakeste omavahelist mõju. Nimelt see asjaolu teeb hüdrodünaamika (ja selle võrrandid) mõnevõrra keerulisemaks, kuid kogu valdkonna märksa põnevamaks.

### 1. Massi jäävuse seadus: pidevuse võrrand

Vaatleme suvalist fikseeritud piirkonda  $V$ . Olgu see piiratud rajaga  $A$ . Kahemõõtmelisel juhul on selle piirkonna rajaks mingi joon. Kolmemõõtmelisel juhul on tegemist mingi ruumalaga, mis paikneb teatava pinna sees. Allpool eeldame, et tegemist on suhteliselt lihtsa kujuga piirkondade ja nende rajadega ning et matemaatilistes arutlustes kasutatud valemid on konkreetse piirkonna jaoks rakendatavad.

Kui aine tihedus on  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ , siis aine kogumass valitud piirkonnas on  $M = \int_V \rho dV$ .

Massi muutumise kiirus on  $\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV$ . Kui piirkond  $V$  (järelkult ka selle raja  $A$ ) on fikseeritud, siis Leibnizi teoreemi (vt. allpool) kohaselt võib diferentseerida integraalialust funktsiooni. Öeldakse samuti, et sel puhul on integreerimise ja diferentseerimise operaatorid kommuteeruvad; teisisõnu, integreerimise ja diferentseerimise järjekorda võib vabalt valida. Allpool näeme, et selline omaduse on pigem erand kui reegel.

Niisiis on mingis fikseeritud piirkonnas  $V$  paikneva ainehulga (aine kogumassi) muutumise kiirus

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (1.1)$$

vaadeldaval erijuhul võrdne integraaliga funktsiooni  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  tuletisest aja järgi ehk aine tiheduse muutumise keskmise kiirusega.

Aine tihedus ei muutu aga iseenesest<sup>1</sup>. Kui ainet ei teki ega kao ning aine enda omadused ei muutu, saab tihedus varieeruda vaid piirkonna  $V$  ja ümbritseva keskkonna vahel toimuva

<sup>1</sup> Me ei vaatle siin nn. aktiivseid keskkondi, kus näiteks keemiliste reaktsioonide või intensiivse kiirgumise tõttu võib aine tihedus muutuda.

ainevahetuse tõttu. See toimub läbi piirkonna raja  $A$ . Fikseeritud ruumala  $V$  korral ei toimu ainevahetust siis, kui aine seisab paigal ehk aineosakeste kiirused on kõikjal nullid. Kui aga mingi aineosakese kiirus pinna  $A$  mingis punktis on  $\vec{u}(x, y, z, t) = (u, v, w)$ , siis piirkonnas paikneva massi muutumise kiirus tänu läbi pinna  $A$  mingi lõpmata väikese osa  $dA$  liikuvale ainele on

$$\rho u \cos \beta dA = \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA, \quad (1.2)$$

kus  $\beta$  on nurk kiirusvektori  $\vec{u}(x, y, z, t)$  ja pinnast  $A$  väljapoole suunatud normaalühikvektori  $\vec{n}$  vahel. Vektori märk raja direfentsiaali kohal on pandud lihtsalt tuletamaks meelde, et kolmemõõtmelisel juhul on tegemist pinna diferentsiaaliga. Kui vektorite  $\vec{u}$  ja  $\vec{n}$  vaheline nurk on alla 90 kraadi, liigub aine piirkonnast  $V$  välja; kui aga üle 90 kraadi, on tegemist aine sissevooluga piirkonda  $V$ .

Aine massi muutumise summaarne kiirus ainevahetuse tõttu piirkonna  $V$  ja seda ümbritseva keskkonna vahel on niisiis integraal üle piirkonna  $V$  raja ehk  $-\int_A \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA$ , kus pinna ühikvektor on ühendatud pinna diferentsiaaliga. Miinusmärk viimases valemis on seotud vektori  $\vec{n}$  suuna valikuga ning kajastab lihtsalt tõsiasja, et aine väljavoolu korral on suurus  $u \cos \beta = \vec{u} \cdot \vec{n} > 0$ , kuid piirkonnas  $V$  asuva aine hulk väheneb.

Massi jäävuse seadus tähendab vaadeldaval juhul lihtsalt seda, et aine massi muutus piirkonnas  $V$  on alati võrdne ainevahetuse bilansiga selle piirkonna rajal  $A$  ehk sisse- ja väljavoolu bilansiga:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_A \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA. \quad (1.3)$$

Saadud seose lihtsustamiseks on tarvis teisendada integraalid võrrandi (1.3) erinevatel pooltel nõnda, et integreerimine toimuks üle sama piirkonna. Seda saab teha **Gauss-Ostrogradski teoreemi** alusel, mille järgi on mingi (vektor)funktsiooni voog läbi piirkonna  $V$  rajapinna  $A$  (teisisõnu, ainevahetuse bilans) võrdne integraaliga selle funktsiooni divergentsist üle piirkonna  $V$  selle piirkonna rajal

$$\int_A \vec{F} dA = \int_V \text{div} \vec{F} dV; \text{ ekvivalenttsel kujul } \int_A \vec{F} dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad (1.4)$$

Valemi (1.4) rakendamine seosele (1.3) annab tulemuseks:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_V \text{div}(\rho \vec{u}) dV, \quad (1.5)$$

Nüüd on võimalik ühendada võrrandi (1.5) erinevatel pooltel paiknevad integraalid, mis annab tulemuseks

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) \right] dV = 0, \quad (1.6)$$

Tuletatud seos kehtib iga piirkonna  $V$  jaoks, mille puhul arutluses toodud integraalid eksisteerivad, näiteks pideva funktsioonide funktsioonide ja ühelisidusate tükati pidevate rajadega kehade puhul nagu kera või korrapärased hulktahukad. Kindlasti kehtib see iga ainega täidetud ruumi punkti  $(x, y, z)$  ümbritseva lõpmata väikese kera jaoks. See on võimalik vaid siis, kui viimase seose integraalialune funktsioon on null igas punktis  $(x, y, z)$ .

Kui see nõnda poleks, oleks võimalik määratleda nii väike punkti  $(x, y, z)$  ümbrus, milles  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u})$  oleks kas kõikjal positiivne või negatiivne. Matemaatilise analüüsi kursuses näidatakse, et pideva funktsiooni puhul on selline valik alati võimalik. Tulemuseks oleks nullist erinev kolmekordse integraali väärtus, mis on vastuolus võrrandiga (1.6)

Seega tähendab massi jäävuse seadus pideva keha mehaanikas, et igas punktis kehtib seos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0; \text{ sageli antud vektorkujul } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} = 0 \quad (1.7)$$

Saadud seost hüütakse pidevuse võrrandiks diferentsiaalvormis.

Lainetuse dünaamika raames, aga ka madamere (rannikumere) dünaamikas tervikuna (v.a. veealune akustika) analüüsil loetakse vesi kokkusurumatuks:  $\rho(x, y, z, t) = \text{const}$ . Sellisel juhul on pidevuse võrrandil eriti lihtne kuju:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ ehk } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.8)$$

### **Abimaterjal: Integraalide tuletised**

Liikumisvõrrandite tuletamisel on sageli tarvis leida tuletisi mitmemõõtmelistest integraalidest, näiteks

$$\frac{d}{dt} \int_V F(x, y, z, t) dx dy dz = \frac{d}{dt} \int_V F(x, y, z, t) dV, \quad (1.9)$$

kus  $F$  on mingi funktsioon (ka vektor-funktsioon või tensor) ning  $V(t)$  on mingi vedeliku piirkond, mis võib olla kas fikseeritud (liikumatu) või kulgeda koos ülejäänud vedelikuga. Selles valemis on teadlikult kirjutatud  $d/dt$ , kuna pärast kolmekordset integreerimist üle ruumala  $V$  on tulemuseks funktsioon, mis sõltub ainult ajast. Juhul, kui  $V(t)$  on mingi fikseeritud piirkond, mille kuju ja asend ruumis ei muutu, ning  $F(x, y, z, t)$  rahuldab teatavaid tingimusi (mida me siinkohal ei vaatle, kuid mis loetakse üldiselt täidetuiks), võib diferentseerida funktsiooni  $F(x, y, z, t)$  integraali märgi all, seega

$$\left[ \frac{d}{dt} \int_V F(x, y, z, t) dV \right]_{V=\text{const}} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} F(x, y, z, t) dV. \quad (1.10)$$

Sel puhul öeldakse, et integreerimise ja diferentseerimise operatsioonid kommuteeruvad.

Liikivas vedelikus piirkond  $V(t)$  üldiselt deformeerub ja/või liigub. Seejuures ei pruugi piirkonna raja  $A$  liikuda vedelikuosakeste kiirusega. Selliste integraalide puhul ei tohi lihtsalt niisama diferentseerimise ja integreerimise järjekorda vahetada. Ka lihtsaimal ühemõõtmelisel juhul on sellise integraali arvutamine keerukas. Matemaatilise analüüsi kursuses näidatakse, et muutuvate rajadega integraali tuletis avaldub valemiga (Fihthengoltz, II kd., §509):

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} F(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) dx + F[b(t), t] \frac{db(t)}{dt} - F[a(t), t] \frac{da(t)}{dt}. \quad (1.11)$$

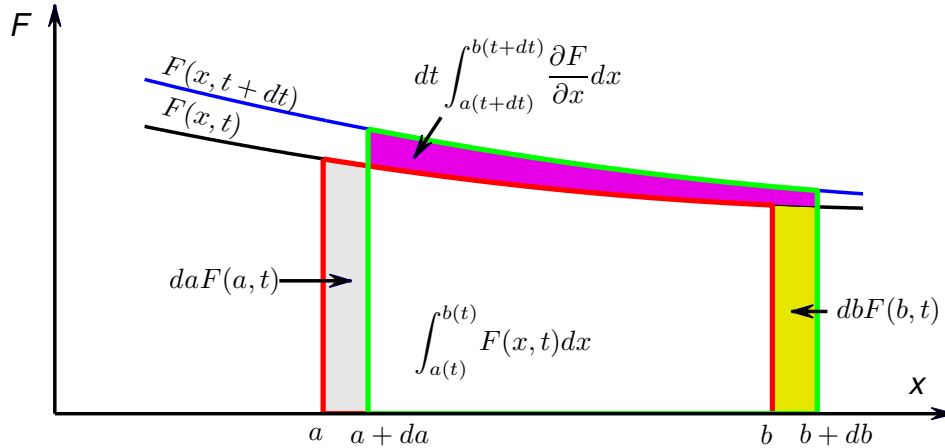
Toodud seost kutsutakse sageli **Leibnizi valemiks**. Selle tuletamiseks piisab, kui seose vasakul pool olevat integraali funktsioonina  $G[x, t, a(t), b(t)]$  ning rakendada liitfunktsiooni diferentseerimise reegleid (Kangro, Matemaatiline analüüs, I kd.).

Leibnizi valemi parema poole esimene liige väljendab kõvertrapetsi pindala muutumist ajavahemiku  $[t_0, t_1]$  vältel joone  $F(x, t)$  asendi muutumise tõttu. Teine ja kolmas liige iseloomustavad sama pindala muutumist ülemise ja alumise integreerimisraja muutumise tõttu.

Mitmemõõtmelisel juhul on Leibnizi teoreem esitatav kujul

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F(\vec{x}, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dV + \int_{A(t)} \vec{dA} \cdot \vec{u}_A F, \quad (1.12)$$

kus  $A$  on valitud ruumala pind ja  $\vec{u}_A$  selle pinna ehk ruumala  $V$  raja liikumise kiirus.



Joonis 1.1. Leibnizi teoreemi geomeetiline interpretatsioon

## 2. Newtoni teine seadus: impulsi jäävuse seadus ja liikumisvõrrandid

Newtoni (teine) seadus, üks klassikalise füüsika alustalasid tema kuulsast teosest „Principia”, ütleb, et mingi keha kiirendus on võrdeline kehale mõjuva jõuga. Võrdeteguriks on seejuures keha mass jagatisega. Traditsiooniliselt pannakse see kirja kujul  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Kuna kiirendus

$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$  on lihtsalt kiiruse tuletis, on

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{u}), \quad (1.13)$$

ning Newtoni teine seadus väljendab tegelikult märksa universaalsemat printsiipi – keha impulsi jäävuse seadust välisjõudude puudumisel (ehk Newtoni esimese seaduse analoogi) kombineerituna sellega, et keha impulsi muutumise kiirus on võrdne kehale mõjuvate välisjõudude summaga

Idealiseeritud lõpmata väikeste mõõtmetega tahkete kehade (punktmasside) puhul, mis ei puutu kokku teiste kehadega, on tekkinud liikumine täielikult määratud kehale mõjuva välisjõuga (või välisjõudude summaga). Pideva keskkonna mehaanikas on olukord põhimõtteliselt teistsugune: keskkonna iga punkt (osake) on kogu aeg kokkupuutes naaberosakestega. Seetõttu mõjub osakelele samaaegselt nii otsene välisjõud kui ka selle kaudne mõju teiste osakeste kaudu.

Pideva keskkonna osakesele mõjuvad jõud on mugav jaotada kolme liiki:

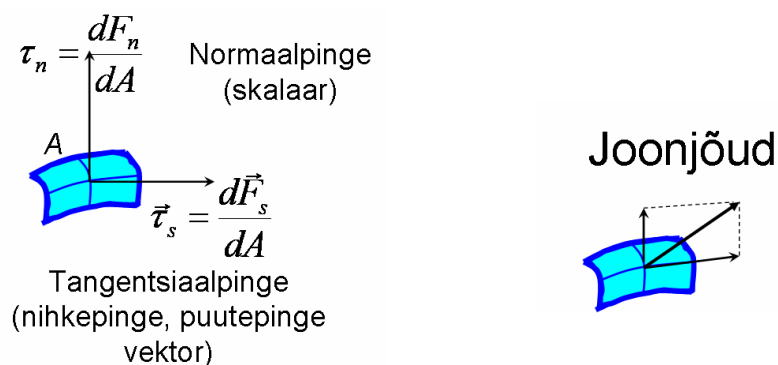
(i) **Mahujõud**usid tekitavad vaadeldavast keskkonna piirkonnast väljaspool paiknevad allikad ilma otsese kokkupuuteta. Taoliselt tekivad mitmesugused keskkonnale mõjuvad jõuväljad: gravitatsioonijõud, magnetjõud, elektrostaatiline või elektromagnetiline jõud. Sellised jõud võivad olla erineva tugevusega vaadeldava keskkonna erinevates punktides. Üldiselt mõjuvad need keskkonna kõigile osistele võrdeliselt osiste massiga. Neid jõudusid väljendatakse massi- või ruumalaühiku kohta. Nagu klassikalises mehaanikaski, pole oluline, kui mitu välise

jõu allikat mõjutavad keskkonna liikumist. Keskkonna käitumine on määratud väliste jõuväljade vektorsummaga. Lainetuse ja rannikumere dünaamikas on üldiselt domineeriv raskusjõud; suuremastaabiliste liikumiste puhul moodustavad olulise komponendi Maa pöörlemisest tingitud efektid nagu Coriolisi jõud.

Selliseid mahujõudusid, mis esituvad teatava funktsiooni gradiendina, nimetatakse konservatiivseteks. Konservatiivse mahujõu klassikaline näide on raskusjõud.

(ii) **Pinnajõudusid** tekitavad mingi (mõttelise) pinna osakese seda ümbritseva keskkonna elemendid otsese kokkupuute kaudu. Need jõud on jämedalt võrdelised kontaktpinna pindalaga ning neid väljendatakse pinnauhiku kohta. Pinnauhikule  $dA$  rakenduv pinnajõu võib, nagu klassikalises mehaanikas, jagada normaal- ja tangentsiaalponendiks, mis on suunatud vastavalt elemendiga  $dA$  risti ja paralleelselt. Öeldakse, et need komponendid tekitavad vastavalt normaalpinge  $\tau_n = \frac{dF_n}{dA}$  ja nihkepinge (või puutepinge)  $\vec{\tau}_s = \frac{d\vec{F}_s}{dA}$ .

Normaalpinge on skalaarne suurus (suunatud risti pinna elemendiga). Kahemõõtmelise raja(pinna)  $A$  puhul on ka nihkepinge skalaarne suurus, kuid kolmemõõtmelise pinna puhul kahest komponendist koosnev vektor.



Joonis 1.2 Pinnajõud ja joonjõud

(iii) **Joonjõud** ei ilmne tavaliselt pideva keskkonna liikumisvõrrandites, kuid neid tuleb sageli arvestada rajatingimuste formuleerimisel (nt. pindpinevusjõud).

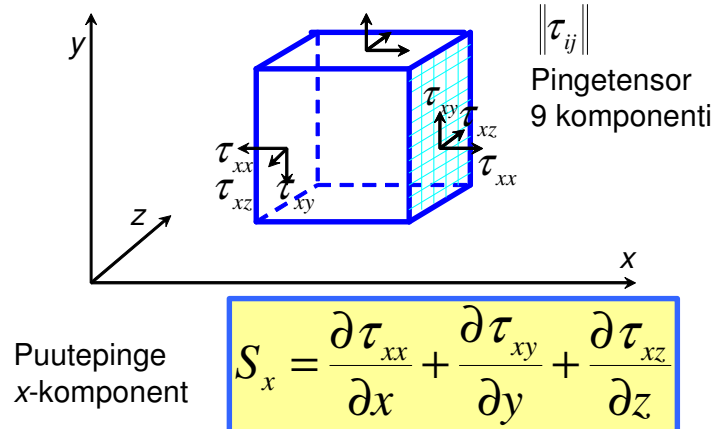
## 2.1. Pideva keskkonna osakest mõjutavad pinnajõud

Pideva keskkonna osakesele mõjuvad (välised) mahujõud (näiteks gravitatsioonijõud) on keskkonna dünaamika seisukohalt enamasti ette antud välistingimuste poolt.

Pideva keskkonna mehaanika keskne (ja sageli väga keerukas) probleem seisneb keskkonna konkreetse osakese liikumist mõjutavate jõudude kirjeldamises. Klassikalistes käsitlustes lahendatakse see vaadeldavat punkti ümbritseva lõpmata väikese kuubi tahkudele mõjuvate jõudude analüüsi kaudu. Selle käigus tehakse tavaliselt hulk lihtsustusi, mis peegeldavad konkreetse keskkonna spetsiifilise omadusi.

Selle kuubi igale tahule mõjub keskkonna naaberelementide poolt tekitatud pinge, mis on kirjeldatav kolme suurusega – tahule mõjuva normaalpinge suuruse ja nihkepinge kahe komponendiga, s.o. kokku kolme suurusega. Kuna kuup on ideaaljuhul lõpmata väike, on kuubi vastastahkude paarid virtuaalselt identsed, mistõttu pinged kuubi vastastahkudel võib lugeda võrdseteks (kuid vastasmärgilisteks). Seega on igale vastastahkude paarile mõjuvad

pinged kirjeldatavad kolme arvuga ning punktis mõjuvate pingete täielik komplekt kirjeldatav üheksa suurusega<sup>2</sup>.



Joonis 1.3. Pingetensori komponendid

Kõik need suurused on loomulikult sõltuvad konkreetsest punktist  $(x, y, z)$  ning ajast  $t$ , olles seega nelja muutuja funktsioonid. Nendest suuruste komplekti nimetatakse pingetensoriks  $\mathbf{T}$ . Nende suuruste väärtustest koostatud  $3 \times 3$ -maatriksi  $\|\tau_{ij}\|$  elemente  $\tau_{ij}$  mingis koordinaatsüsteemis nimetatakse pingetensori komponentideks (ka koordinaatideks; levinud on mitmesugused nimetused).

Üldiselt on levinud seisukoht, et klassikalises pideva keha mehaanikas on pingetensor sümmeetriline, s.o. vastavad maatriksid  $\|\tau_{ij}\|$  on sümmeetrilised  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ . (Alati see nõnda pole; näiteks J. Heinloo arendatud pöördeleiselt anisotroopse mehaanika raames on sellest omadusest taganatud). Seetõttu on tegelikult vajalik teada vaid kuut pingetensori komponenti. Väike lohus seegi.

## 2.2. Cauchy võrrandid

Pideva keskkonna mingis punktis mõjuvate jõudude summat on võimalik täielikult kirjeldada pingetensori kaudu. Põhimõtteline eelis sellisel kirjeldusel on, et vaadeldava punkti dünaamikat mõjutavate mitmesuguste (sise)jõudude mõju on nüüd väljendatav teatavate üheselt määratletud suuruste – pingetensori komponentide – kaudu. Esialgu pole sellest teadmisest palju kasu; siiski võimaldab taoline käsitlus paljudel juhtudel jõuda mõistlike ja selge füüsikalise tagapõhjaga argumentide ja lihtsustuste kaudu reaalselt kasutatavate võrranditeni.

Tuleme tagasi punkti ümbritseva lõpmata väikese kuubi juurde. Tähistame sellegi tähega  $V$  ja selle pinna tähega  $A$ . Pinnajõud selle pinnauhiku kohta on  $\vec{n} \cdot \vec{\tau}$ , kus  $\vec{\tau}$  on vastavate nihkepingete vektor ja  $\vec{n}$  on pinna normaal. Pinnajõud pinna  $A$  elemendi kohta on järelikult  $d\vec{A} \cdot \vec{\tau}$ . Newtoni seadus lõpmata väikese keskkonna piirkonna (vedela elemendi) puhul tähendab, et selle impulsi muutumise kiirus (mis ongi kiirendus massiühiku kohta) on võrdne sellele elemendile mõjuvate mahujõudude ja pinnajõudude summaga.

<sup>2</sup> Detailsemates pideva keha mehaanika ja dünaamika käsitlustes vaadeldakse iga tahu puutepingeid eraldi.

Toodud loogikat on mugav rakendada koordinaattelgede suunas. Olgu näiteks  $g_x$  kõigi mahujõudude summa projektsioon  $x$ -teljele. Sama telje suunas mõjuvate mahujõudude summa on integraal  $F_{x,mahu} = \int_A \rho g_x dV$  ja pinnajõudude summa integraal

$F_{x,pinna} = \int_A (\tau_{x1} + \tau_{x2} + \tau_{x3}) dA$ . Newtoni seadus (1.13)  $\vec{F} = m \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{u})$  ütleb, et kuubis  $V$  paikneva veehulga  $x$ -telje suunalise summaarse impulsi  $\int_V \rho u dV$  muutumise kiirus  $\frac{D}{Dt} \int_V \rho u dV$  on võrdne kõigi sellele kuubile  $x$ -telje suunas mõjuvate jõudude summaga.

Teisisõnu,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u dV = \int_V \rho \frac{Du}{Dt} dV = \int_V \rho g_x dV + \int_A (\tau_{x1} + \tau_{x2} + \tau_{x3}) dA. \quad (1.14)$$

Siin on taotluslikult kasutatud täistuletise sümbolit  $\frac{D}{Dt}$  tuletamaks meelde, et üldiselt muutuvad pideva keskkonna osakeste omadused nii nende muutumise tõttu ajas kui ka nende liikumisest tingitud muutuste tõttu.

Gauss-Ostrogradski teoreemi (1.4) saab muidugi kasutada ka skalaarfunktsioonide jaoks, interpreteerides valemis (1.4) kaht funktsiooni komponenti nullidena; näiteks  $\vec{F} = (F_x, 0, 0)$ .

Nõnda saame, et  $\int_A (\tau_{x1} + \tau_{x2} + \tau_{x3}) dA = \int_V \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{x1} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{x2} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{x3} \right) dV$  ning seos (1.14)

taandub kujule

$$\int_V \left[ \rho \frac{Du}{Dt} - \rho g_x - \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{x1} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{x2} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{x3} \right) \right] dV = 0. \quad (1.15)$$

Kuna seos (1.15) kehtib suvalise pideva keskkonna elemendi kohta, peab integraalialune funktsioon olema null, seega kehtib võrrand

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{x1} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{x2} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{x3} \right) = 0 \quad (1.16)$$

igas vaadeldava keskkonna punktis.

Täpselt samasugused seosed saab tuletada  $y$ - ja  $z$ -telje suunaliste liikumiste kohta. Võrrandeid (1.16) nimetatakse vahel **Cauchy liikumisvõrranditeks**. Need väljendavad lihtsalt Newtoni klassikaliste printsiipide üht komponenti - (impulsi ehk liikumishulga) muutumise seadust nii-öelda pideva keha sisesel mikrotasandil. Analoogiliste argumentide alusel saab tuletada ka võrrandid vedelikuosakeste pöördemomendi jaoks.

Kombineerides massi jäävuse seaduse ja Newtoni seaduse alusel tuletatud Cauchy liikumisvõrrandid, on tulemuseks neli võrrandit nelja tundmatu funktsiooni (tihedus  $\rho$ , kiiruse komponendid  $u$ ,  $v$ , ja  $w$ ) suhtes. Võrrandid sisaldavad veel üheksat pingetensori komponenti. Kuigi need on hetkel tundmatud, peegeldavad need konkreetse keskkonna omadusi ning paljudel juhtudel on neid võimalik võrdlemisi lihtsalt leida.

### 3. Olekuvõrrandid

Konkreetse keskkonna omadustel baseeruvaid seoseid pingetensori komponentide ja pideva keskkonna muid omadusi peegeldavate suuruste vahel nimetatakse olekuvõrranditeks

(constitutive equations). Edasi kontsentreerume vedeliku erijuhule, mida iseloomustavad suhteliselt väikesed sisepinged

Suhteliselt lihtne kuju on pingetensoril juhul, kui pidev keskkond on tasakaaluasendis. See sünnib näiteks siis, kui vedelik on kas paigal (sh. hüdrostaatilises tasakaalus) või kogu vedelikumass liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt. Viimase juhu saab sobiva koordinaatide teisendusega taandada paigalseisvale vedelikule. Siis võivad nullist erineda vaid pinge normaalkomponendid vedeliku pinnal. Vastasel juhul tekivad nullist erinevate pingete tõttu mingid liikumised (voolamised) ning vedelik ei saa olla tasakaalus. Nende komponentide väärtused mistahes suuna jaoks peavad samuti olema võrdsed; vastasel juhul hakkaks vedelik mingis suunas liikuma. Teisi sõnu, pingetensor on siis isotroopne (s.o. ei sõltu suuna valikust). Sellise tensori komponendid on

$$\tau_{isotr} = - \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix} = -p \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -p\delta_{ij}, \quad (1.17)$$

kus  $\delta_{ij}$  on nn. Kroneckeri delta ning kus miinusmärk on valitud seetõttu, et positiivne normaalpinge on suunatud keskkonna elemendi paisumisele.

Suurust  $p$  nimetatakse **termodünaamiliseks rõhuks**. See suurus on seotud keskkonna tiheduse ja temperatuuriga  $T$  olekuvõrrandi kaudu (mis näiteks ideaalse gaasi jaoks on  $p = \rho RT$ ).

Liikivas reaalses vedelikus esinevad praktiliselt alati<sup>3</sup> viskoossuse poolt põhjustatud vedelate elementide omavahelise pinged. Pingetensori diagonaali komponendid ei pruugi enam olla võrdsed. Sageli lahutatakse pingetensor kaheks komponendiks  $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}$ , millest üks ( $-p\delta_{ij}$ ) vastab teoreetilisele tasakaaluolekule ning on isotroopne ja teine ( $\sigma_{ij}$ ) kajastab vedeliku liikumist.

Rakendustes eeldatakse sageli, et suurus  $p$  ka selles lahutuses on termodünaamiline rõhk. Päril täpne selline eeldus pole, kuna termodünaamilisele tasakaalule vastavad suurused on üldiselt defineeritud vaid tasakaaluseisundi(te) jaoks, kuid voolav vedelik või gaas võib olla tasakaaluseisundist võrdlemisi kaugel. Siiski, nõnda toimides tekkivad ebatäpsused on väikesed tingimusel, et üksikute molekulide relaksatsiooniaeg on palju väiksem voolamise enese tüüpilisest ajamastaabist.

Pingetensori mitteisotropne osa  $\sigma_{ij}$  on kirjeldatud lähenduses põhjustatud ainuüksi vedeliku liikumise ebaühtlusest tingitud (lokaalsetest) pingetest. Selle komponentide aproksimeerimisel kasutatakse klassikaliste vedelike hüdrodünaamikas ära asjaolu, et vedelike viskoossus on sageli üsna väike. See asjaolu võimaldab kasutada lähendust, mille kohaselt lõpmata väikeste vedelikuelementide vahelised pinged on võrdelised nende elementide voolamise kiiruste erinevustega. Pinged avaldatakse siis kiiruse diferentsiaalide kaudu analoogiliselt sellele, kuidas funktsiooni muut avaldub funktsiooni diferentsiaali kaudu. Selline lähendus on teatavas mõttes lineaarse lähenduse analoog. Samuti on siis analoogia mitmemõõtmeliste funktsioonide Taylori ritta arendamisega. Termodünaamiline rõhk vastaks siis funktsiooni väärtusele vaadeldavas punktis ning funktsiooni muutumist selle punkti ümbruses iseloomustavad osatuletiste väärtused.

Tensoris  $\sigma_{ij}$  on 9 komponenti. Kiiruse kolme komponendi muudud (piirjuhul tuletised) koordinaattelgede suunas kujutavad üldjuhul endast samuti üheksat sõltumatut funktsiooni.

<sup>3</sup> Me ei vaatle siin ülijuhtivaid vedelikke



Tensori  $\sigma_{ij}$  iga komponent võib niisiis sõltuda üheksast muutujast ning kogu süsteemi täielikuks kirjeldamiseks tuleb analüüsida 81 erinevat funktsiooni.

Kiiruse komponentide osatuletised moodustavad samuti tensori  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ , mida on mugav esitada

kujul

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.18)$$

Selle nn. antisümmeetriline osa  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  peegeldab vedeliku elemendi pöörlemist.

Pöörlemine ei mõjuta elemendi deformatsiooni ega sellele mõjuvaid pingeid, mistõttu viimased saavad sõltuda ainult suurustest  $e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ . Teisisõnu, tensori  $\sigma_{ij}$

komponendid sõltuvad vaid tensori  $e_{ij}$  komponentidest.

Siinkohal tehakse üks klassikalise hüdrodünaamika keskseid ja põhimõttelisi lihtsustusi, millest ülal juttu. Nimelt eeldatakse, et **tensorite  $\sigma_{ij}$  ja  $e_{ij}$  vahel eksisteerib lineaarne seos** (olekuvõrrand)

$$\sigma_{ij} = K_{ijmn} e_{ij}, \quad (1.19)$$

kus  $K_{ijmn}$  on neljandat järku konstantsete komponentidega tensor, mis peegeldab keskkonna fundamentaalseid omadusi. Nagu ülal mainitud, on taoline lähendus üldiselt aktsepteeritav suhteliselt väikese viskoossusega keskkondade puhul. Tegemist ei ole siiski lineaarsetele süsteemidele omaste lihtsustuste sisseviimisega<sup>4</sup>, vaid eeldusega, et teatavate keerukate funktsioonide perede vahel on lineaarne seos.

Teine fundamentaalne lihtsustus, mis siinkohal sisse viiakse, koosneb kahest omavahel seotud eeldusest: nii **vaadeldav keskkond kui ka pingetensor on isotroopsed**. See lähendus on täiesti aktsepteeritav enamuse mere hüdrodünaamika ülesannete juures. Merevesi on lokaalselt isotroopne, s.o. selle omadused praktiliselt ei sõltu suunast; samuti ei ole mingit põhjust, miks peaks pingetensor olema mitteisotroopne. Siiski eksisteerivad paljud keskkonnad, kus need eeldused ei kehti.

Isotroopses keskkonnas on kõik suunad ekvivalentsed, mistõttu peab ka seos (1.18) kiiruse osatuletiste ja pingetensori vahel olema sõltumatu valitud koordinaadistikust. Teisi sõnu, tensor  $K_{ijmn}$  peab olema isotroopne. Tensoranalüüsi kursuses näidatakse, et kõik neljandat järku isotroopsed tensorid avalduvad kujul

$$K_{ijmn} = \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu \delta_{im} \delta_{jn} + \gamma \delta_{in} \delta_{jm}, \quad (1.20)$$

<sup>4</sup> Lineaarseteks hüütakse selliseid süsteeme või hulkasid, mille elementide või osiste iga lineaarkombinatsioon kuulub samasse süsteemi. Mingi võrrand on lineaarne parajasti siis, kui selle lahendite mistahes lineaarkombinatsioon rahuldab võrrandi homogeenset versiooni. Mingi nähtuse, struktuuri või laine lineaarsus ei tähenda seega, et näiteks laine profiil oleks laudsile. Võrrandite keeles tähendab see hoopis, et vastavat nähtust kirjeldavad lineaarsed (diferentsiaal)võrrandid. Lineaarses süsteemis levivad kõik (laine)komponendid üksteisest sõltumatult ning ei mõjuta teiste käitumist. Nõnda on lineaarses süsteemis tervik alati võrdne komponentide lihtsa summaga ning süsteemi kui terviku toime identne tema osade toimete summaga. Hüdrodünaamikas on see enamasti teisiti.

kus  $\lambda, \mu, \gamma$  on teatavad konstandid, mis käsitletaval juhul sõltuvad vaid vaadeldava keskkonna omadustest. Kuna  $\sigma_{ij}$  on vastavalt tehtud eeldustele samuti sümmeetriline, peab seda seose (1.19) kaudu esitav tensor olema sümmeetriline  $K_{ijmn}$  indeksite  $i$  ja  $j$  suhtes. Võrrandist (1.20) järeldub siis aga, et  $\gamma = \mu$ .

Tehtud ekskursioon tensorite teooriasse ja kirjeldatud füüsikalisealt hästi mõistetavad lihtsustused on seega võimaldaud peaaegu täielikult määratleda olekuvõrrandite tundmatud funktsioonid vaid kahe koefitsiendi kaudu. Niisiis, äkitselt on 81-st tundmatust koefitsiendist järele jäänud vaid kaks. Seoste (1.20) ja  $\gamma = \mu$  abil saab olekuvõrrandi ja pingetensori avaldised taandada järgmisele kujule:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \text{div} \bar{u} \delta_{ij}, \quad \tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + 3\lambda \text{div} \bar{u} \delta_{ij}. \quad (1.21)$$

Lihtsustused pole sellega veel lõppenud. Tensori  $\tau_{ij}$  diagonaali elementide summa jaoks saame viimasest seosest

$$\tau_{ii} = -3p + (2\mu + \lambda) \text{div} \bar{u}, \quad (1.22)$$

millest saab avaldada rõhu

$$p = -\frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) + \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right) \text{div} \bar{u}. \quad (1.23)$$

Tensori  $\tau_{ij}$  diagonaali elemendid ei pruugi olla võrdsed. Seetõttu defineeritakse **keskmine rõhk** (erinevalt termodünaamilisest rõhust) nende keskvaertusena

$$\tilde{p} = -\frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}). \quad (1.24)$$

Suurust  $\kappa = \frac{2}{3}\mu + \lambda$  kutsutakse 'coefficient of bulk viscosity' (summaarne viskoossus)

Reaalsete vedelike kirjeldamisel kasutatakse Stokes'i lähendust  $\frac{2}{3}\mu + \lambda = 0$ . Teatavas mõttes toetab seda lähendust üheaatomiliste gaaside kineetiline teooria; siiski ei ole see lähendus kooskõlas termodünaamika teise seadusega. Stokes'i lähenduses on olekuvõrranditel kuju

$$\tau_{ij} = -\left(p \delta_{ij} + \frac{2}{3} \mu \text{div} \bar{u}\right) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (1.25)$$

Kokkusurumatu vedeliku jaoks on  $\text{div} \bar{u} = 0$  (massi jäävuse seadus), koefitsient  $\lambda$  langeb olekuvõrrandist välja (s.o. Stokesi lähendust pole tarvis vaadeldagi) ning see taandub otsekohe kujule

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (1.26)$$

Selliselt väljendatud pingetensori  $\tau_{ij}$  ja tensori  $e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  komponentide lineaarne

seos kordaja  $2\mu$  kaudu kujutab endast tasaparalleelse voolamise  $u = u(y)$  jaoks Newtoni poolt antud nihkepinge lineaarse määratluse  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$  üldistust kolmemõõtmelisele juhule.

Seetõttu nimetatakse vedelikke, mille puhul selline lineaarne seos kehtib (s.o. Stokes'i lähendus kehtib, summaarne viskoossus on null), **Newtoni vedelikeks**.

Kordaja  $\mu$  väljendab konkreetse keskkonna viskoossust ning seda nimetatakse viskoossuse koefitsiendiks või kordajaks. Kokkusurumatu vedeliku ja tehtud lihtsustuste puhul väljenduvad vedeliku voolamise kõik „sisemised” omadused viskoossuse kordaja kaudu.

Kirjeldatud seose füüsikaline mõte pingetensori komponentide  $i \neq j$  jaoks on lihtsalt selles, et vedelale elemendile rakenduv lokaalne pinge loetakse võrdeliseks voolamise ruumilise muutlikkuse poolt põhjustatud lokaalse deformatsiooniga selle elemendi naabruses. Selle

tensori diagonaali komponentide mõte on natuke keerukam. Kirjutades aga näiteks  $\tau_{11}$  kujul

$$\tau_{11} = -p + 2\mu \left[ -\frac{1}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \right],$$

on selge, et viskoossuse poolt tingitud normaalpinge  $x$ -telje suunas on võrdeline selle telje suunalise venituse määra ja vedela elemendi üldise paisumise määra erinevusega. Teisi sõnu, vaid üldise paisumise või kokkusurumise **erinevused** põhjustavad viskoosseid normaalpingeid.

#### 4. Navier-Stokes'i ja Euleri võrrandid

Lõviosa vedeliku liikumist kirjeldavate võrrandite tuletamisest on nüüd tehtud olekuvõrrandite formuleerimise näol merevee omadustega vedelike jaoks.

Asendades eelmises jaotuse leitud olekuvõrrandid (1.25) Cauchy liikumisvõrranditesse, saame tulemuseks nn. **Navier-Stokes'i võrrandid**:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3} \mu \text{div} \vec{u} \delta_{ij} \right], \quad (1.27)$$

Üldiselt sõltub keskkonna viskoossus märgatavalt termodünaamikast, s.o. temperatuurist. Suhteliselt väikeste objektide vaatlemisel on temperatuuri erinevused praktikas võrdlemisi väikesed ning  $\mu$  võib lugeda konstandiks. Sellisel juhul on Navier-Stokesi võrranditel kuju

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \left[ \Delta \vec{u} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \mu \text{div} \vec{u} \right]. \quad (1.28)$$

Merevesi on üldiselt kokkusurumatu, mistõttu  $\text{div} \vec{u} = 0$  ning võrrandid on veel lihtsamad

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \Delta \vec{u}, \text{ vektorkujul } \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot p + \rho \vec{g} + \mu \Delta \vec{u} \quad (1.29)$$

Paljudel juhtudel on vee viskoossus hüljatav. Näiteks väikese amplituudiga lainete liikumisel, aga ka suhteliselt aeglaste hoovuste korral, on see nõnda. Siis lihtsustuvad Navier-Stokes'i võrrandid veelgi:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \text{ ehk vektorkujul } \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot p + \rho \vec{g} \quad (1.30)$$

Saadud võrrandeid nimetatakse **Euleri võrranditeks**. Sisuliselt peegeldavad nii Navier-Stokesi kui ka Euleri võrrandid vedelikuosakeste impulsi jäävuse seadust (meenutame, et mehaanilise keha impulss on  $m\vec{v}$ ). Need ütlevad, et konkreetse liikuva veeosakese impulss muutub välis- ja sisejõudude mõjul (sh. liikumist käivitb rõhu gradient), kusjuures viskoossus pidurdab liikumist. Seejuures võib veeosakese impulss muutuda nii tema enda kiiruse muutumise kaudu kui ka selle tõttu, et osake liigub koosmõjus teiste osakestega.

##### 4.1 Euleri võrrandite tuletamine Newtoni seadustest

Euleri võrrandid saab põhimõtteliselt samadel eeldustel tuletada ka otse Newtoni seadusest. Vaatleme ideaalset vedelikku juhul, mil mahujõududest on süsteemis esindatud vaid gravitatsioonijõud  $\vec{F}(\vec{x}, t) \equiv (0, 0, -g)$ , mida loeme konstantseks kogu vaadeldavas alas. Veeosakesele mõjuv lokaalne jõud on sellisel juhul vaid gravitatsioonijõu poolt tekitatud rõhk  $P$  (mis on teatavasti skalaarne suurus). Vaatleme jälle mingit suvalist ruumala  $V$ , mille pind (raja) on  $A$ . Ruumalas  $V$  paiknevale veele mõjuv summaarne jõud on siis

$$\int_V \rho \vec{F} dV - \int_A P \vec{n} dA, \quad (1.31)$$

kus  $\vec{n}$  on piirkonna  $V$  raja  $A$  normaalvektor. Selles piirkonnas paikneva vee impulss on

$$\int_V \rho \vec{u} dV, \text{ selle muutus} \quad (1.32)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV$$

ning impulsi voog läbi raja  $A$  on  $-\int_A \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA$ .

Newtoni teine seadus piirkonnas  $V$  paikneva vee jaoks tähendab, et piirkonnas paikneva vee impulsi muutus avaldub piirkonda mõjutavate mahujõudude ja piirkonna raja läbiva impulsi voo summana:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV = \int_V \rho \vec{F} dV - \int_A P \vec{n} dA - \int_A \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA. \quad (1.33)$$

Seose (1.33) parema poole teisele ja kolmandale liikmele saame rakendada Gauss-Ostrogradski teoreemi (vt. pidevuse võrrandi tuletamist), misjärel

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV = \int_V (\rho \vec{F} - \vec{\nabla} P) dV - \int_V \rho \vec{u} (\nabla \cdot \vec{u}) dV. \quad (1.34)$$

Kasutades nüüd massi jäävuse seadust / pidevuse võrrandit ja täistuletise definitsiooni, saame võrrandi (1.34) teisendada kujule

$$\int_V \left( \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} - \rho \vec{F} + \vec{\nabla} P \right) dV = 0. \quad (1.35)$$

Kuna võrrand (1.35) peab olema rahuldatud mistahes piirkonna  $V$  jaoks, tuleneb sellest võrrandist, et

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P - \vec{F}. \quad (1.36)$$

Niisiis järelduvad Euleri võrrandid vahetult Newtoni seadustest. See on ka loomulik, sest nendes võrrandites ei kajastu mitte mingil moel keskkonna sisemised omadused „tänu” puuduvale viskoossusele. Seevastu Navier-Stokes'i võrrandite tuletamisel tuleb keskkonna omadused mingil moel kajastada.

## 4.2 Võrrandid energia jaoks

Võrrandid energia jaoks on mugav tuletada üldkujul Cauchy liikumisvõrranditest (1.16)

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{x1} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{x2} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{x3} \right) = 0 \quad (1.37)$$

Sama võrrand kehtib kiiruse  $y$ - ja  $z$ -komponentide jaoks. Lõpmata väikese veeosakese (mille puhul saab eeldada, et selle kõik komponendid liiguvad sama kiirusega) kineetiline energia on

$\hat{E}_k = \frac{1}{2} m |\vec{u}|^2$ . Kui selles võrrandis kasutame massi  $m$  asemel tihedust  $\rho$ , saame seose

**energiatiheduse** jaoks. Kuna  $|\vec{u}|^2 = u^2 + v^2 + w^2$ , siis selle osakese kineetiline energia on

$$\hat{E}_k = \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2).$$

Cauchy võrrandid on kirjutatud välja kiiruse komponentide tuletiste jaoks. Neid saab lihtsalt

teisendada võrranditeks kiiruse komponentide tuletiste ruutude jaoks samasuse  $\frac{Du^2}{Dt} = 2u \frac{Du}{Dt}$

kasutamise abil. Selleks tuleb näiteks Cauchy võrrand kiiruse  $x$ -suunalise komponendi  $u$  jaoks korrutada funktsiooniga  $u$  ja kasutada seda samasust. Nõnda saame:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = \rho u g_x + u \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{x1} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{x2} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{x3} \right). \quad (1.38)$$

Summeerides võrrandid (1.38) kõigi kolme kiiruse komponendi jaoks, saame

$$\frac{\rho}{2} \frac{D}{Dt} |\vec{u}|^2 = \rho \sum_{x,y,z} u_x g_x + \sum_{i=1,2,3} u_i \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{i1} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{i2} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{i3} \right). \quad (1.39)$$

Võrrand (1.39) ütleb, et mingi vedelikuosakese energia võib muutuda kas

(a) mahujõu töö tulemusena, või

(b) vedelikuosakestele mõjuvate pinnajõudude (sisejõudude) töö tulemusena

Vedeliku kineetilise või potentsiaalse energia muutumist kirjeldavatele võrranditele võib anda veel mitmesuguseid erinevaid kujusid näiteks pidevuse võrrandi kaasamise kaudu. Analoogiliselt on võimalik tuletada veeosakeste impulsi võrrandid. Kõigil neil on suhteliselt keerukas kuju.

## 5. Bernoulli võrrand

Pideva keskkonna liikumist kirjeldavate võrrandite oluline lihtsustamine on võimalik juhul, kui viskoossust ei pruugi arvestada. Sellisel juhul kirjeldavad liikumisi Euleri võrrandid. Kuna selles võrrandis esinevad mittelineaarliikmed saab kirjutada samasusena

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = -(\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}))_x + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 \right), \quad (1.40)$$

saab selle võrrandi  $\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot p + \rho \vec{g}$  täistuletise  $\frac{D\vec{u}}{Dt}$  saab esitada kujul

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) + \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 \right) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) + \vec{\nabla} E_k. \quad (1.41)$$

Suurus  $E_k$  on siin kineetilise energia tihedus  $|\vec{u}|^2/2$ . Jagades Euleri võrrandi läbi tihedusega, saab sellele anda kuju

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + \frac{p}{\rho} + \vec{F} \right) = \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}), \quad (1.42)$$

kus  $\vec{F} = (0, 0, -g)$ . Võrrandites (1.40)–(1.42) on eeldatud, et ainus mahujõud on gravitatsioonijõud, mis mõjub vaid vertikaalsuunas. Seega esineb liige  $-g$  vaid kiiruse vertikaalkomponendi võrrandis.

Sooritatud teisendused on võimalik sõnastada üldisemas vormis pöörise mõiste kaudu. Vedeliku liikumise pööriseks (vorticity) nimetatakse kiiruse välja vektorkorrutist osatuletiste vektoriga  $\vec{\nabla} \times \vec{u}$ . Pööris on samuti kolmemõõtmeline väli nagu kiiruski ning väljendab veeosakese lokaalset pöörlemist. Voolamisi, mille puhul  $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0}$ , nimetatakse pöörisevabadeks ehk mittepööriselisteks. Lõviosa looduslikest voolamistest on pööriselised ning pöörisevabadeks saab neid lugeda vaid erijuhtudel. Siiski on mitmetel rakendustes olulistel juhtudel pööris võrdlemisi väike ning neid voolamisi saab piisava täpsusega lugeda pöörisevabadeks.

Edasi tehakse oluline lihtsustus: eeldatakse, et vedeliku tihedus  $\rho = \rho(p)$  on ainult rõhu funktsioon. Selliseid vedeliku liikumisi nimetatakse **barotroopseteks**. Pinnalainete puhul on see lähendus üldkasutatav. Ka rannikumeres on veemassid üldiselt suhteliselt hästi läbisegunenud ning see lähendus aktsepteeritav. Teisiti on see näiteks siselainete puhul.

Voolamiste puhul, kus tiheduse muutumine muudel põhjustel (soolsus, temperatuur) on oluline, on vaja tuletuskäiku modifitseerida.

Barotroopsete liikumiste puhul on võrrandi (1.42) kolmas liige võimalik teisendada kujule

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{dp}{\rho}, \quad (1.43)$$

Samasugused võrrandid kehtivad  $y$ - ja  $z$ -telje suunaliste komponentide jaoks. Saab näidata, et selles valemis esinev integraal sõltub vaid ruumi koordinaatidest. Selline trikk on põhimõtteliselt vajalik vaid selleks, et kõnesolev liige kirjutada tuletisena koordinaatide järgi mingist kindlasti funktsioonist. Muidugi saaks veel lihtsamalt: kui eeldada näiteks, et vedeliku tihedus on konstant, siis võiks tiheduse lihtsalt tuletise märgi alla viia.

Tegelikult on oluline, et saame nüüd defineerida **Bernoulli funktsiooni**

$$B = \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz = \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 + P(\vec{x}) + gz, \quad (1.44)$$

mille kaudu saab Euleri võrrandid esitada kujul:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla B = \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}). \quad (1.45)$$

Sageli kasutatakse selle võrrandi ühe- ja kahmõõtmelisi variante. Võrrandi (1.45)  $x$ -telje suunaline komponent on näiteks järgmine:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz \right] = (\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}))_x. \quad (1.46)$$

Võrrandeid (1.45) (aga ka nende võrrandite üksikuid komponente nagu võrrand (1.46)) hüütakse **Bernoulli võrranditeks**. Sisuliselt kujutavad need endast liikumisvõrrandite spetsiifilist kombinatsiooni, mille jaoks on teatavatel tingimustel võimalik leida ühest parameetrist sõltuv täpne lahend – keeruka diferentsiaalvõrrandite süsteemi nn. esimene integraal.

## 5.1. Bernoulli võrrandi integreerimine mõnedel erijuhtudel

**Statsionaarne voolamine** ei sõltu ajast  $t$ , seega taanduvad Bernoulli võrrandid kujule

$$\nabla B = \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}). \quad (1.47)$$

Võrrandi (1.47) vasak pool on pinna  $B = \text{const}$  normaalvektor. Võrrandi (1.47) paremal poolel on aga vektor, mis on risti nii vektoriga  $\vec{u}$  kui ka vektoriga  $\nabla \times \vec{u}$ .

Kuna voolujooned on oma igas punktis samasihilised vektoriga  $\vec{u}$ , siis esimene tingimus sisuliselt ütleb, et pind  $B = \text{const}$  sisaldab iga voolujoont, millel on ühiseid punkte selle pinnaga. Tõepoolest, oletame, et mingi voolujoon lõikab pinda  $B = \text{const}$ . Vedeliku liikumine toimub piki voolujoont, mis, nagu just selgus, on risti selle pinna normaalvektoriga ning seega suunatud piki selle pinna mingit puutujat mööda. Sama arutlus on õige iga selle voolujoone punktis; seega ei saa (pidev) voolujoon kuidagi enam pinnalt  $B = \text{const}$  lahkuda. Täpselt samuti sisaldab pind  $B = \text{const}$  kõiki pöörisjooni, millel on vähemalt üks ühine punkt selle pinnaga.

Seega **statsionaarse hõõrdevaba ning barotroopse** voolamise puhul on Bernoulli funktsioon konstantne mistahes voolujoonel või pöörisjoonel:

$$\frac{1}{2} |\vec{u}|^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{const} \text{ voolujoonel või pöörisjoonel} \quad (1.48)$$

Meenutame, et lisaks on tehtud eeldus, et mahujõududest mõjub vedelikule vaid gravitatsioonijõud. Seda eeldust on võimalik nõrgendada: piisab sellest, et kõik mahujõud oleksid konservatiivsed.

**Statsionaarse hõõrdevaba barotroopse ja pöörisevaba** voolamise korral on  $\nabla \times \vec{u} = \vec{0}$  ning võrrand (1.48) kehtib kogu vedelikuga täidetud alas:

$$\frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{const} \quad (1.49)$$

Oluline on märkida, et (mitte)pöörlevas taussüsteemis) on barotroopsed voolamised pöörisevabad seni, kuni viskoossus on hüljatav. Mere hüdrodünaamika ülesannetes on viskoossus enamasti oluline vaid merepõhja vahetus läheduses, nn. viskoosses piirikihis. Tegelikult ei ole ka pinnalainetes toimuvad voolamised päriselt pöörisevabad, kuid enamuse praktiliste ülesannete puhul võib pööriselisuse jätta arvestamata.

**Mittestatsionaarne pöörisevaba voolamine.** Mittestatsionaarsete liikumiste jaoks saab Bernoulli võrrandit lihtsalt integreerida vaid pöörisevabade voolamiste erijuhul. Sellisel juhul on  $\nabla \times \vec{u} = \vec{0}$ . Fundamentaalne järelduse sellest omadusest on, et eksisteerib mingi skalaarne funktsioon  $\phi = \phi(x, y, z, t)$  nõnda, et  $\vec{u} = \nabla \phi$ . Funktsiooni  $\phi$  nimetatakse **kiiruse potentsiaaliks**. Vastupidi, kui selline funktsioon eksisteerib, siis on voolamine pöörisevaba. Asendades funktsiooni  $\phi$  mittestatsionaarsetesse võrrandisse (1.45), saame selle kirjutada kujul:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla B = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \nabla B = \nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + B \right) = 0. \quad (1.50)$$

Teisisõnu,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + B \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + B \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + B \right) = 0. \quad (1.51)$$

Seega funktsioon  $\partial \phi / \partial t + B$  ei sõltu ühestki ruumi koordinaadist ning on vaid aja funktsioon:  $\partial \phi / \partial t + B = F(t)$ . Seega taandub Bernoulli võrrand vaadeldaval juhul kujule

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz = F(t) \quad (1.52)$$

## 5.2. Bernoulli võrrandi integraalide rakendusi

### Pitot' toru

Henry Pitot (1695-1771), prantsuse matemaatik, kasutas Seine'i jõe voolukiiruse mõõtmiseks Bernoulli võrrandi omadustel baseeruvat lihtsat seadet, mida praegu nimetatakse tema järgi.

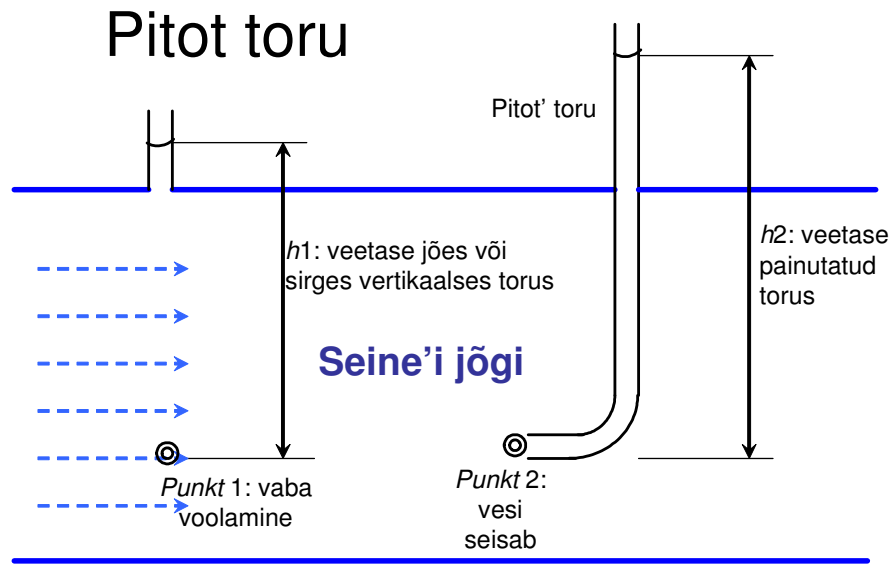
Pitot' toru on lihtsalt 90-kraadise nurga all painutatud toru, mis pannakse vette nõnda, et toru painutatud ots paikneks täpselt vastuvoolu, s.o. horisontaalselt ja piki jõesängi. Eeldame, et Bernoulli võrrandi rakendamise tingimused on täidetud. Asetegu punkt 1 Pitot toru otsa sügavusel  $h_1$  vabas voolus, mida Pitot toru ei mõjuta, kuid just sellel voolujoonel, mis tabab Pitot toru otsa, ning punkt 2 samal voolujoonel just Pitot toru otsas, kus voolu kiirus on null. Siis saame võrrandist (33)

$$\frac{1}{2}u_1^2 + \int \frac{dp_1}{\rho} + gz_1 = \frac{1}{2}u_2^2 + \int \frac{dp_2}{\rho} + gz_2. \quad (1.53)$$

Siin on ilmselt  $z_1 = z_2$  (sh. jões  $z_1 = z_2 = h_1$ ),  $\rho = \text{const}$  (kuna on tegemist samade veeosakestega) ja  $u_2 = 0$ ; seega

$$\frac{1}{2}u_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{p_2}{\rho}, \text{ millest vee kiirus } u_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} \quad (1.54)$$

Rõhud punktides 1 ja 2 on võrdsed nende vastavate veesammaste kõrgusega:  $p_1 = \rho gh_1$ ,  $p_2 = \rho gh_2$ . Järelikult vee kiirus on

$$u_1 = \sqrt{2g(h_2 - h_1)}. \quad (1.55)$$


Joonis 1.4. Voolu kiiruse mõõtmine Pitot toru abil

Kui nüüd tahta päris täpne olla, siis peaks arvesse võtma ka vee viskoossust, õhurõhku, võimalikke kapillaarjõudusid ja torude hüdraulisi takistusi. Praktikas tuleb ilmselt toimda nõnda, et mõõta mõned korrad muude meetoditega täpselt vee kiirus ja siis kasutada vastavaid parandustegureid. Meetodi ilu seisneb aga selles, et formaalselt pole oluline kui sügaval Pitot toru asub; seega on võimalik kiiresti hinnata vee kiirust erinevatel sügavustel.

Pitot toru on – hoolimata oma lihtsusest – ka tänapäeval üsna laialt kasutusel, vt. raamat Hüdraulika ja pumbad.

*Ülesanne 1: Millised on Pitot toruga mõõtmiseks vajalikud tingimused vee voolamisele?*

*Ülesanne 2: Leida vee kiirustele 10 cm/s, 25 cm/s, 50 cm/s, 1 m/s, 2 m/s ja 5 m/s vastavad veesamba kõrgused Pitot torus. Milliste kiiruste juures on selline meetod mõistlik ja kergesti kasutatav?*

## Auk paagis

Teine klassikaline ülesanne on seotud väikeste avadega anuma seintes või põhjas. Loomulikult hakkab vedelik (vesi, bensiin jne.) avast välja voolama.

Vedeliku väljavool põhjustab üldiselt vedeliku taseme alanemise, mistõttu päris rangelt võttes pole tegemist statsionaarse voolamisega. Piisavalt suure anuma ja piisavalt väikese augu korral ei pea seda aga arvestama ning võib lugeda, et veetaseme laskumise kiirus on null. See oleks päris õige juhul, kui kogu aeg natuke vett peale kallataks.

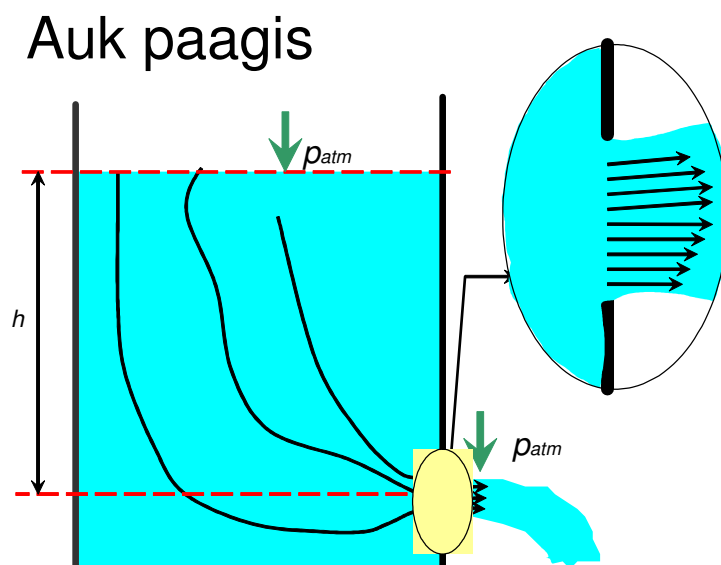


Anumast välja voolab ikka see vesi, mis on ava tekkimise (kraani avamise vms.) hetkel ava tasapinnast ülalpool. Suhteliselt väikese ava korral võib lugeda vee tasapinna laskumist (ehk vee voolamist allapoole anuma ülaosas) ühtlaselt allapoole suunatuks. Mida voolujooned ja veeosakesed vahepeal teevad, see meid selle ülesande juures ei huvita. Oluline on see, et Bernoulli funktsioon  $B$  on konstant kõikidel voolujoontel. Kuna kõik voolujooned lähevad lõpuks tagasi vee pinnale, kus Bernoulli funktsioonil on sama väärtus igas pinna punktis, on kogu anumast  $B = \text{const}$ .

Avast natuke eemal, kus juga on juba täielikult formeerunud ning liigub edasi inertsist, mõjub sellele igast küljest ainult atmosfääri rõhk.

Tegelikult pole see päris õige, sest juga ei ole ühtlane (vt. väikest joonist) ning joa sees rõhk veidi varieerub. Jättes joa ebahürtluse kõrvale, on esimeses lähenduses joa kiirust võimalik hinnata Bernoulli võrrandi alusel:

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + gh = \frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{u^2}{2}, \text{ millest } \mathbf{\text{Torricelli valem}} \quad u = \sqrt{2gh}. \quad (1.56)$$



Joonis 1.5. Vedeliku väljavool anumast

## Venturi toru

Vee jm. vedelike vooluhulka on võimalik mõõta voolu ahenemisel tekkiva survevahe kaudu. Survetorustikes on sellistest mõõteriistadest kasutusel Venturi toru, mõõtediafragma e. mõõteava ning mõõtedüüs, avasängides Venturi ja Parshalli rennid.

Venturi toru konstrueeris USA-s Clemens Herschel (1842-1930), kes andis oma mõõteriistale vooluahendusi uurinud Giovanni Venturi (1746-1822) nime. Venturi toru ristlõige aheneb sujuvalt ja laieneb siis uuesti algristlõikeeni. Toru kitsamas osas on kiirus suurem kui laiemas osas ning Bernoulli teoreemi tõttu rõhk väiksem. Rõhkude vahet mõõdetakse enamasti diferentsiaalmanoneetri abil.

Rõhtsa Venturi toru ( $z_1 = z_2$ ) ning konstantse tihedusega vedeliku jaoks saame Bernoulli võrrandist

$$\frac{1}{2}u_1^2 + \int \frac{dp_1}{\rho} + gz_1 = \frac{1}{2}u_2^2 + \int \frac{dp_2}{\rho} + gz_2 \Rightarrow \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{p_2}{\rho}, \quad (1.57)$$

millest

$$\frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2) = \frac{p_2 - p_1}{\rho}. \quad (1.58)$$

Rõhkude vahe saame määrata veesammaste kõrguste  $h_1$  ja  $h_2$  vahe abil

$$p_2 - p_1 = (\rho_2 - \rho_1)g(h_2 - h_1). \quad (1.59)$$

Siit selgub, et nõnda mõõtmisel peab kasutama mõõdetavast erineva tihedusega vedelikku. Õhuvoolu mõõtmisel kõlbab teiseks vedelikuks vesi, kuid vee voolu mõõtmisel on tarvis vee tihedusest erineva tihedusega vedelikku – muidu ei teki diferentsiaalmanomeetris veesammaste kõrguste vahet.

Viimase vajaliku seose saame asjaolust, et vool on statsionaarne, seega läbib iga ristlõiget võrdne vedelikuhulk. Kui vooluhulk ajaühikus on  $A$ , siis

$$\frac{1}{4}\pi D^2 u_1 = A = \frac{1}{4}\pi d^2 u_2, \text{ millest } u_1 = u_2 \left(\frac{d}{D}\right)^2 \quad (1.60)$$

Nüüd kasutame Bernoulli võrrandit (42), millest (43) ja (44) abil

$$\frac{1}{2}(u_2^2 \left(\frac{d}{D}\right)^4 - u_2^2) = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g(h_2 - h_1)}{\rho} \Rightarrow u_2 = \sqrt{\frac{2(\rho_2 - \rho_1)g(h_2 - h_1)}{\rho[(d/D)^4 - 1]}} \quad (1.61)$$

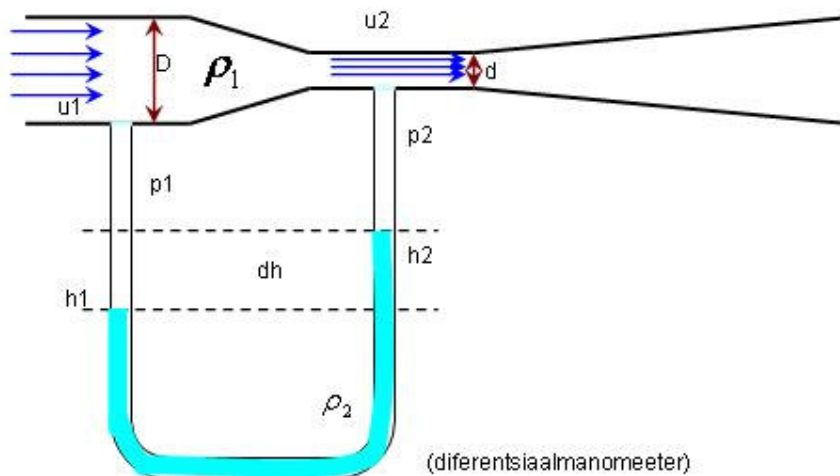
ning vooluhulk

$$Q = \frac{1}{4}\pi d^2 u_2 = \frac{1}{4}\pi d^2 \sqrt{\frac{2(\rho_2 - \rho_1)g(h_2 - h_1)}{\rho[(d/D)^4 - 1]}}. \quad (1.62)$$

Vooluhulk võib üldiselt ajas muutuda. Venturi toru mingi aja jooksul läbinud vedeliku ruumala saame arvutada integraalina vooluhulgast.

## Veemõõtja: Venturi toru

Clemens Herschel (1842-1930), Giovanni Venturi (1746-1822)



Joonis 1.6. Veemõõtja Venturi toru baasil