Lainete ja hoovuste matemaatiline kirjeldus

ehk lühiülevaade lainete maailmas ja rannikumere hüdrodünaamikas valitsevast kodukorrast

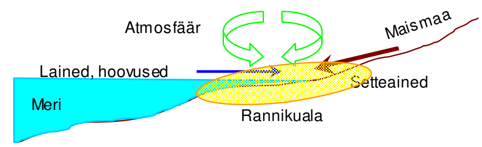
Rannikutehnika & rannikuprotsessid

Vajavad teadmisi

(i) Atmosfääri dünaamikast

(ii) **Rannikumere dünaamikast, eelkõige lainetest**

(iii) Randa moodustavate maismaa tükikeste = tahkete osakeste / setteainete dünaamikast



Lained merel: mitte ainult vaatepilt

Cape Reinga, Uus-Meremaa, sept. 2009

Kuulus Fuji mäe panoraam kui tsunamihoiatus

Tsunami: suurimaid merelt saabuvatest ohtudest

Kalk Bay, Lõuna-Aafrika, 26.08.2005, mõlemad mehed pääsesid vigastustega)

Didenkulova et al. 2006

4. mai 2008: ootamatu hiidlaine Koreas: hukkus 9 inimest

Mõned lained on suuremad kui laevad

Lainete ja laeva kahevõitluses jääb vahel laev kaotajaks

Tsunami & üleujutuse & tormilainete füüsika: sarnasus ja erinevus

- Eksisteerib veepind – piir kahe 1000x erineva tihedusega ~pideva keskkonna vahel
- Võimalik laineline liikumine – signaali / energia levik
- "Vedru" – gravitatsioonijõud

Erinevad signaaliallikad:
- maakoore liikumine, tuul, õhurõhk ja selle mustri liikumine, olemasolev veeseis, ranniku geomeetria

Erinev mittelineaarsuse aste

Erinev ajamastaap

Mis on laine?

Meresõnastik: laine - veepinnal või selle piirikihtidel leviv häiritus

Tegelikult üldisem nähtus, mille puhul

I. Mingi signaal liigub keskkonna ühest punktist teise

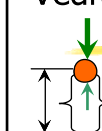
II. Keskkond (materjal) ise oluliselt ei liigu

III. Signaal või häiritus säilitab oma vormi

IV. Tavaliselt liigub signaal või häiritus konstantse kiirusega

Vedru võnkumine

Eeldus: tasakaaluasendist välja viidud kehale mõjuv (tagastav) jõud võrdeline nihke suurusega



$F = -\alpha\eta(t)$

$$F = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Newtoni seadus $m\frac{d^2\eta(t)}{dt^2} = -\alpha\eta(t)$

Kirjutatuna veidi teisiti $\frac{d^2\eta(t)}{dt^2} = -\omega^2\eta(t)$ $\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$

(harilik diferentsiaalvõrrand) $\eta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

(või eksponent, kui tagastav jõud teisemärgiline)

A – amplituud

ω - ringsagedus

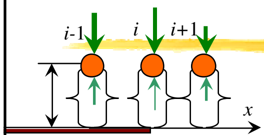
φ - (alg)faas

Laine *versus* vedru

Eeldused:

palju seotud vedrusid;

Igale kehale mõjuv jõud võrdeline suhtelise nihkega naabrite suhtes



$$F_i = F_{i1} + F_{i2}$$

$$F = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$F_{i1} = -\alpha\eta_i + \alpha\eta_{i-1}$$

$$F_{i2} = -\alpha\eta_i + \alpha\eta_{i+1}$$

$$F = -\alpha\eta(t)$$

$$m\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = F_i = \alpha\eta_{i-1} - 2\alpha\eta_i + \alpha\eta_{i+1}$$

diferentsskeem?

Vedrud piisavalt lähestikku → arendus Taylori ritta x järgi →

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \omega^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$

D'Alembert'i võrrand (teist järku osatuletistega lineaarne diferentsiaalvõrrand)

Üks lahenditest: $\eta(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$ (lainelahend)

NB!! Aga ainult siis, kui $\omega = \pm vk$ (dispersiooniseos)

Seega ei saa kõiki laine parameetreid vabalt valida

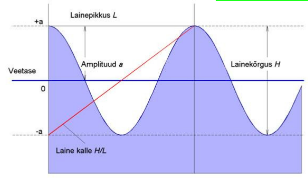
Unistus: lainete parameetrid valemites

Pinnalainete potentsiaal $\phi = f(z)\sin(kx + ly + \omega t)$

Vee kiirus avaldub potentsiaali kaudu $\frac{\partial\phi}{\partial x} = u$ $\frac{\partial\phi}{\partial y} = v$ $\frac{\partial\phi}{\partial z} = w$

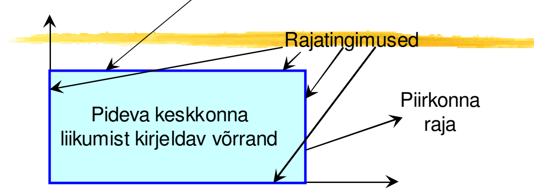
Veepinna kuju ⇔ z=0 $\eta = f(0)\sin(kx + ly + \omega t)$

Laine amplituud a=f(0) $\eta = a\sin(kx + ly + \omega t)$



$f(z)$ - kirjeldab, kuidas laine omadused muutuvad sügavuse suurenedes

Pinnalainete rajaülesanne: keerukas, kuna raja pole fikseeritud



Pidevuse võrrand → vedeliku liikumine
Liikumisvõrrandid → rajatingimused
(a) Kinemaatiline rajatingimus – kiiruse komponentide jaoks kõigil rajadel
(b) Dünaamiline rajatingimus – kui raja ei ole jäik/fikseeritud

Mis liigub laines?

(Keskkond (materjal) ise oluliselt ei liigu)

Põhiliselt liigub energia;

seega

laine = nähtus, mille puhul energia levib keskkonnas ilma, et keskkond oluliselt liiguks või ümber kujuneks.

Tegelikult liiguvad:

I. Energia – põhiliselt

II. Keskkonna osakesed – veidi

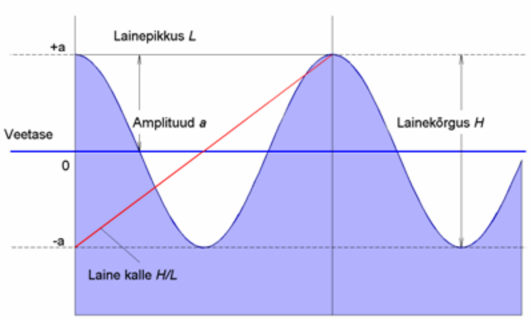
III. Laineharjad (faas)

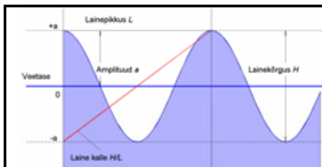
Lained võivad olla:

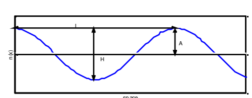
I. Progressiivsed lained – energia liigub mingis suunas

II. Seisulained (energia paikneb mingis piirkonnas)

Lihtsaim (lineaarne ehk siinus)laine näeb profiilis välja nõnda







Lainesõnastik

Laine kõrgus - vahemaa laine madalaima/kõrgeima punkti vahel

(pinnalaine) amplituud - 1/2 lainekõrgusest

pikkus - vahemaa kahe järjestikuse laineharja vahel

periood - ajaintervall kahe järjestikuse laineharja

sagedus - mingit punkti läbivate laineharjade arv ajaühikus = 1/periood

kalle (järskus, steepness) = laine kõrgus / laine pikkus

faasikiirus – laineharjade (samafaasipunktide) leviku kiirus

rühmakiirus – energia leviku kiirus

Laineid on igale maitsele I ehk erinevad klassifikatsioonid

Fundamentaalsed omadused

Lineaarsed lained

Üksiklainete superpositsioon on sama tüüpi laine nagu üksiklainedki

Vrdl: lineaarne ruum: ruumi suvaliste elementide lineaarkombinatsioon kuulub samasse ruumi

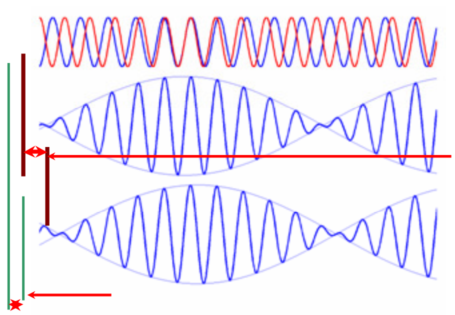
Mittelineaarsed lained (soliton, lööklaine jne.)

Üksiklainete superpositsioon ei pruugi olla sama tüüpi laine nagu üksiklainedki

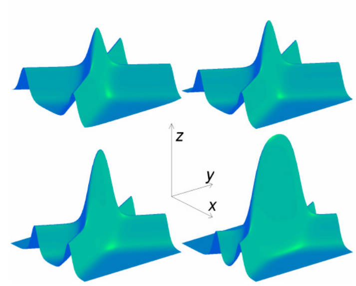
Mis on **lineaarne** laine

- Lineaarse võrrandi lahend
  - iga kahe või enama laine lineaarkombinatsioon rahuldab sama võrrandit $S = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots$
- Mittelineaarsed lained:
  - mittelineaarse võrrandi lahendid;
  - kahe laine kohtumisel võivad tekkida hoopis muud tüüpi struktuurid

Lineaarsete lainete liitumine: tulemuseks sama tüüpi laine



Mittelineaarsete lainete kohtumine



Lainekõrgus võib suureneda max. 4-kordseks

(üsna uus teadmine, teoreetiliselt analüüsitud 1977, merelainete jaoks esmakordselt rakendatud 2003 TTÜ teadlaste poolt, vt. Horisont 1/2006)

Laineid on igale maitsele II

Dimensioon

A. Ühemõõtmelised lained: keele võnkumine

B. Kahemõõtmelised lained: tuulelained vee pinnal

C. Kolmemõõtmelised lained

Helilained, elektromagnetlained, siselained ookeanides

D. Neljamõõtmelised lained (?)

Ajas kiiresti muutuv laineprofiil nt. turbulentsi tekkimise algstaadiumis

Laineid on igale maitsele III

Keskkonna ja laine liikumiste suund $\vec{u} = (u, v, w)$

A. Ristlained: $\operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$

Keskkonna osakeste liikumise suund risti laine leviku suunaga: keele võnkumine

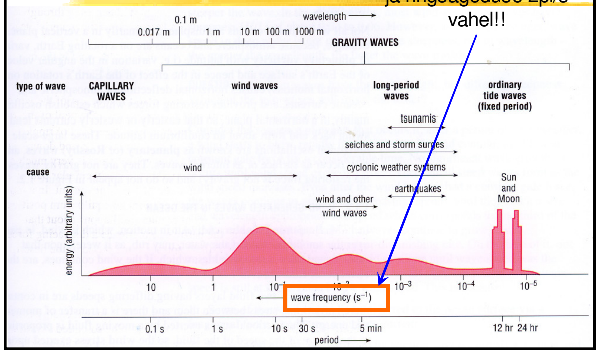
B. Pikilained: $\operatorname{rot} \vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0}$

Keskkonna osakeste liikumise suund samasihiline laine leviku suunaga: helilained, lained vee pinnal

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Meres on palju laineid

Alati teha vahet (lihtsa) sageduse 1/s ja ringsageduse 2pi/s vahel!!



Lainete klassifikatsioon ehk meres on mitmesuguseid laineid

- Pinnalained
- Siselained
- Helilained
- Rossby lained
- Kelvini lained

Pinnalained

- Kapillaarlained
- Tuulelained
- Ummiklained
- Seišid
- Tsunami
- Tõus/mõõn

Vedeliku liikumise võrrandid

(nii hoovuste kui lainete jaoks)

Võrrandite tuletamine

- Eeldus: keskkond on pidev
- Massi jäävuse seadus → pidevuse võrrand
- Impulsi (liikumishulga) jäävuse seadus → Cauchy, Euleri või Navier-Stokesi võrrandid (üsna vastikud osatuletistega või integro-diferentsiaalvõrrandid)
- Liikumisvõrrandite kombineerimine sobival moel & tingimustel → esimene integraal
- Tuntuim esimene integraal: Bernoulli võrrand
- Lineaarsete pinnalainete ülesanne

Argumendid ja muutujad

- Kolm ruumi-koordinaati (x,y,z)
- Aeg *t*
- → F(x,y,z,t)

- vee liikumise kiiruse kolm komponenti
- rõhk
- Tihedus =F[soolsus, temperatuur, rõhk]
- peavad olema määratud igas punktis igal ajahetkel

Materiaalne element (veeosake)

- Asub hetkel t mingis punktis [x(t),y(t),z(t)]
- (ja üldiselt liigub!)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = (u_x, u_y, u_z) = (u, v, w)$$

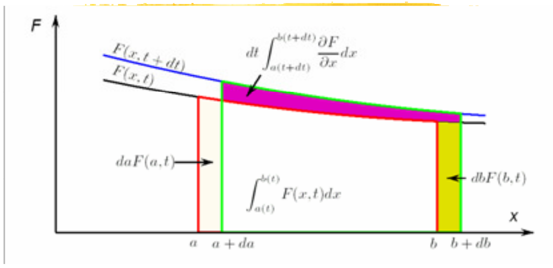
$$\frac{\partial x}{\partial t} = u_x \quad \frac{\partial y}{\partial t} = u_y \quad \frac{\partial z}{\partial t} = u_z$$

$$u_x = u \quad u_y = v \quad u_z = w$$

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = (u, v, w)$$

- Selle mistahes omadus $\gamma = \gamma[x(t),y(t),z(t),t]$
- (üldiselt muutub nii veeosakese liikumise tõttu ühest punktist teise kui ka muudel põhjustel – näiteks soojenemine)

Kahemõõtmeline juht: Leibnizi valem



$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)}F(x,t)dx=\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial}{\partial t}F(x,t)dx+F[b(t),t]\frac{db(t)}{dt}-F[a(t),t]\frac{da(t)}{dt}$$

Materiaalne element (veeosake)

- Seega selle omaduse muutumine ajas on leitav liitfunktsiooni difererentseerimise reegli järgi:

(Chain rule)

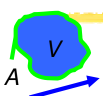
$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{u}+\frac{\partial\gamma}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{v}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{w}$$

- nn. täistuletis $$\frac{D\gamma}{Dt}\overset{def}{=}\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\gamma$$

Omaduse muutumine ajas ja osakese liikumisest tingituna

- Nabla-operaator $\vec{\nabla}\gamma=\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x},\frac{\partial\gamma}{\partial y},\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)$

Massi jäävuse seadus



Aine tihedus $\rho=\rho(x,y,z,t)$

Aine kogumass $\int_V \rho\, dV$

Kiirus $\vec{u}(x,y,z,t)$

Aine kogumassi muutumise kiirus $\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV$

Aine kogumassi muutumine läbi pindala osakese dA $\rho u\cos\beta dA=$
$=\rho\vec{u}\cdot\vec{n}dA=\rho\vec{u}\cdot d\vec{A}$

Aine massi summaarse muutumise kiirus "ainevahetuse" tõttu $-\int_A \rho\vec{u}\cdot d\vec{A}$

Massi jäävuse seadus: pidevuse võrrand

massi muutus piirkonnas V = sisse- ja väljavoolu bilanss $\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}dV=-\int_A\rho\vec{u}\cdot d\vec{A}$

Gauss-Ostrogradski teoreem $\int_A F\,d\vec{A}=\int_V divF\,dV$

$$\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}dV=-\int_V \mathrm{div}(\rho\vec{u})dV \Leftrightarrow \int_V\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{u})\right]dV=0$$

Piirkond V on suvaline → $\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{u})=0}$

$\rho(x,y,z,t)=const$ $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{u}=0}$ $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0}$

Jõud vedelikus

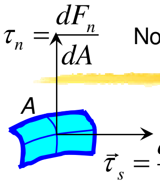
Mahujõud	**Pinnajõud**	**Joonejõud**
mõjuvad teatava vahemaa taha (kaugjõud); tekib jõuväli, mõju võrdelised veeosakese massiga Gravitatsioonijõud Magnetiline Elektrostaatiline	Mõjuvad vedela elemendi ja ülejäänud vedeliku kokkupuute-pinnal Võrdelised pindalaga	mõjuvad piki teatavat joont (pindpinevus) Võrdelised pikkusega Esinevad ainult raja-tingimustes

Mahujõud

- Konservatiivsed: saab avaldada mingi funktsiooni gradiendina
  $\vec{g}=\vec{\nabla}G(x,y,z,t)$
- Dissipatsioonivabal liikumisel konservatiivsete jõudude väljas säilib süsteemi koguenergia
- Töö on sõltumatu liikumise trajektoorist
- (mittekonservatiivsed)
- Gravitatsioonijõud on konservatiivne

$\tau_n = \frac{dF_n}{dA}$ Normaalpinge (skalaar)

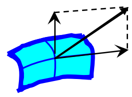
Pinnajõud



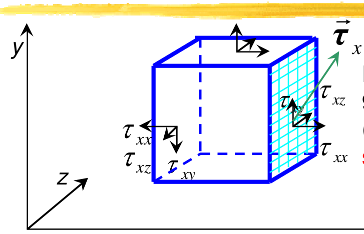
$\vec{\tau}_s = \frac{d\vec{F}_s}{dA}$

Tangentsiaalpinge (nihkepinge, puutepinge vektor)

Joonjõud



Pinged veeosakese "külgedel"

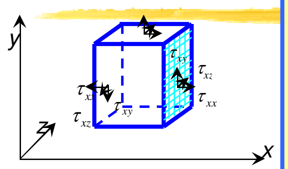


$\|\tau_{ij}\|$ Pingetensor 9 komponenti (tavaliselt sümmeetriline)

x-telje suunas mõjuv jõud

$$\boxed{S_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}}$$

Newtoni / impulsi jäävuse seadus



$$F = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\rho\frac{Du_x}{Dt} = \rho g_x + S_x$$

mahujõud pinnajõud

Cauchy liikumisvõrrandid pingetensori komponentide kaudu

X-telg

$$\boxed{\rho\frac{Du_x}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}}$$

Olekuvõrrandid

- Cauchy võrrandites on 4+9 tundmatut funktsiooni (tihedus, kiiruse komponendid, 9 pingetensori komponenti)
- Koos pidevuse võrrandiga on 4 võrrandit
- Olekuvõrrandid (constitutive equations) võimaldavad leida seoseid pingetensori komponentide vahel
- Stokesi lähendus: 'bulk viscosity' (summaarne viskoossus) =0 !!! – lihtsustab oluliselt olekuvõrrandite kuju

Newtoni vedelik

- Rahuldab tingimust: nihkepinge on võrdeline kiiruse gradiendiga *τ=μ(du/dy)*
- Koefitsient *μ* selles võrduses - viskoossuskoefitsient
- Vesi ja õhk: praktilistes küsimustes saab lugeda Newtoni vedelikeks
- Mitte-Newtoni vedelikud: suure viskoossusega, viskoossus muutub mittelineaarsel moel sõltuvalt kiiruse gradiendist

$$\boxed{\rho\frac{Du_x}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}}$$

Cauchy võrrandid

Navier-Stokes'i võrrandid

Pingetensori komponendid väljendatud olekuvõrrandite kaudu Newtoni vedeliku lähenduses

$$\tau_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\vec{u}\right)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \qquad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\boxed{\rho\frac{Du_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}\langle + \rho g_x\rangle + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\mu e_{xj} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\vec{u}\,\delta_{xj}\right)}$$

Navier-Stokes'i võrrandite erijuhte

Konstantne viskoossus
(meres ja atmosfääris enamasti OK)

$$\rho\frac{Du_x}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\Delta u_x-\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\operatorname{div}\vec{u}\,\delta_{xj}\right)$$

Kokkusurumatus → div u =0 (pidevuse võrrand)
(heli levik võimatu, sageli aktsepteeritav lähendus)

$$\rho\frac{Du_x}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\Delta u_x$$

$$\rho\frac{Du_y}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\Delta u_y \qquad \rho\frac{Du_z}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\Delta u_z$$

$$\rho\frac{Du_x}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\Delta u_x$$

Navier-Stokesi võrrand → Euleri võrrand

Viskoossus hüljatav $\mu=0$ **(hõõrdevaba)**
(meres ja atmosfääris samuti enamasti OK,
lainetuse puhul tavaline lähendus)

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt}=-\vec{\nabla}p+\rho\vec{g}$$

Mere ja atmosfääri paneb liikuma rõhu gradient!

Hõõrdevaba & kokkusurumatu vedelik
= ideaalvedelik
(meres ja atmosfääris ikka veel enamasti OK,
v.a. põhja ja randade lähistel)

Vedeliku liikumise võrrandite tuletamise loogika:

Kaks fundamentaalset printsiipi:
(i) massi jäävuse seadus→pidevuse võrrand

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{u})=0 \qquad \rho(x,y,z,t)=const$$

$$\operatorname{div}\vec{u}=0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

(ii) Mitmesuguste jõudude mõju & Newtoni seadus ehk impulsi jäävuse seadus → Cauchy võrrandid → Navier-Stokesi võrrandid → Euleri võrrandid

Kaks fundamentaalset printsiipi:

(i) massi jäävuse seadus→pidevuse võrrand

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{u})=0 \qquad \rho(x,y,z,t)=const$$

$$\operatorname{div}\vec{u}=0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

(ii) Mitmesuguste jõudude mõju & Newtoni seadus ehk impulsi jäävuse seadus → Cauchy võrrandid → Navier-Stokesi võrrandid → Euleri võrrandid

$$\rho\frac{Du_x}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\Delta u_x$$

Mere ja atmosfääri paneb liikuma välisjõud + rõhu gradient!

Hoovused ja lained ning nende võrrandid: senised lihtsustused

- **Pingetensor sümmeetriline** (üldiselt klassika, aga mitte kõigi pidevate kehade puhul)
- **Stokesi lähendus** (bulk viscosity = 0)
- **Viskoossus** on (kiiruse gradiendi) **lineaarne** funktsioon – **Newtoni vedelik**
- Viskoossus **hüljatav + kokkusurumatu → Euleri** võrrandid
- Viskoossus **pole hüljatav → Navier-Stokesi** võrrandid
- Vedelik **barotroopne** – tihedus sõltub vaid rõhust

Cauchy võrrandite lihtsustamine:
pingetensori koordinaatide väljendamine muude suuruste kaudu

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

→ Navier-Stokes'i võrrandid

$$\rho\frac{Du_x}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\mu e_{xj}-\frac{2}{3}\mu\operatorname{div}\vec{u}\,\delta_{xj}\right)$$

Konstantne viskoossus: meres ja õhus enamasti OK

$$\rho\frac{Du_x}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\Delta u_x-\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\operatorname{div}\vec{u}\,\delta_{xj}\right)$$

Kokkusurumatus → div u =0 (pidevuse võrrand)

$$\rho\frac{Du_x}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\Delta u_x$$

Vedeliku liikumise võrrandite rakendamise valdkonnad meres

- Ookeani & atmosfääri tsirkulatsioon: Navier-Stokesi võrrandid 3-mõõtmelisel juhul (rannikuprotsesside kursuses ei vaatle)
- Hoovused rannikumeres: vertikaalkiirus sageli ebaoluline või lihtsalt arvutatav, seetõttu kasutatakse **madala mere lähendust**
- Hoovuste ja jõe voolu **hüdraulika** (suurelt jaolt baseerub Bernoulli võrrandi rakendustel)
- **Lainetus** (eriti pinnalained - mittestatsionaarne pöörisevaba voolamine - Bernoulli võrrandi rakendus)
- +... paljud-paljud muud valdkonnad

Maa pöörlemine → Coriolise jõud

- Maa pöörlemine: vesi liigub pöörlevas koordinaadistikus;
- Kaks 'lisajõudu': tsentripetaaljõud + Coriolise jõud
- Esimene väljendub gravitatsioonijõu suuruse muutumises;
- Teine tekitab võrrandis lisaliikme:

$$\boxed{\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{u} + \vec{g}_{eff} - 2\vec{\Omega}\times\vec{u}}$$

Vedeliku liikumise võrrandite rakendamise valdkonnad meres

- Ookeani & atmosfääri tsirkulatsioon: Navier-Stokesi võrrandid 3-mõõtmelisel juhul (rannikuprotsesside kursuses ei vaatle)
- Hoovused rannikumeres: vertikaalkiirus sageli ebaoluline või lihtsalt arvutatav, seetõttu kasutatakse **madala mere lähendust**
- Hoovuste ja jõe voolu **hüdraulika** (suurelt jaolt baseerub Bernoulli võrrandi rakendustel)
- **Lainetus** (eriti pinnalained - mittestatsionaarne pöörisevaba voolamine - Bernoulli võrrandi rakendus)
- +... paljud-paljud muud valdkonnad

Bernoulli võrrand(id)

$$\rho\frac{Du_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \cancel{\mu\Delta u_x}$$

- Tuletatakse Euleri võrranditest
- Viskoossust ei arvestata
- Voolamine loetakse **barotroopseks** (tihedus sõltub *ainult* rõhust) $\rho = \rho(p)$
- Euleri võrrandid saab kirjutada kujul

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + \int\frac{dp}{\rho} + gz\right] = \left(\vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})\right)_x$$

(Võrrand liikumise x-komponendi jaoks; analoogilised võrrandid teiste komponentide jaoks)

NB! Lihtsalt üks kaval teisendus, võrrandeid ei lahendata!

Bernoulli funktsioon

Euleri võrrand (x-telg)

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left[\frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + \int\frac{dp}{\rho} + gz\right]} = \left(\vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})\right)_x$$

$$\boxed{B = \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + \int\frac{dp}{\rho} + gz = \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + P(\vec{x}) + gz}$$

Bernoulli võrrand vektorkujul

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \nabla B = \vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})$$

- Liikumisvõrrandite (Euleri võrrandite – ilma viskoossuseta!!) teistsugune üleskirjutus,
- mis teatavatel tingimustel on lihtsalt integreeritav!

Statsionaarne voolamine

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \nabla B = \vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = 0 \qquad \nabla B = \vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})$$

Pinna B normaalvektor

Risti nii kiirusvektori kui pöörise vektoriga

Järelikult pind B=const sisaldab iga voolujoont, millel on ühiseid punkte selle pinnaga

→ (i) statsionaarse (ii) hõõrdevaba (iii) barotroopse voolamise puhul kehtib:

$$\boxed{\frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + \int\frac{dp}{\rho} + gz = const \quad \text{igal voolujoonel või pöörisjoonel}}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}|\vec{u}|^2+\int\frac{dp}{\rho}+gz\right]=\left(\vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})\right)_x$$

=0

=0

Statsionaarne pöörisevaba voolamine

$$\nabla\times\vec{u}=0 \qquad \nabla B=\vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})=0$$

→statsionaarne hõõrdevaba ja pöörisevaba barotroopne voolamine:

$$\boxed{B=\frac{1}{2}|\vec{u}|^2+\int\frac{dp}{\rho}+gz=const}$$

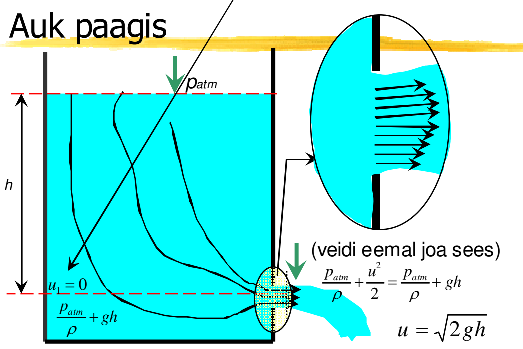
Kogu vedelikuga täidetud alas!

Harjutusi I

Bernoulli võrrand

Auk paagis

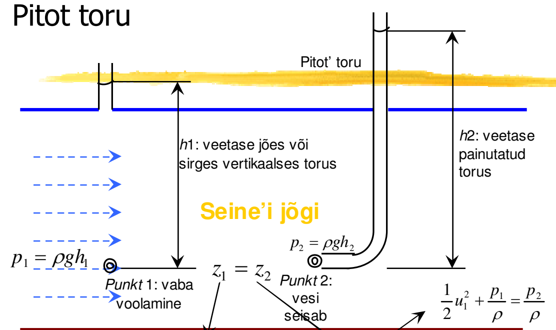
$$\frac{1}{2}u_1^2+\int\frac{dp_1}{\rho}+gz_1=\frac{1}{2}u_2^2+\int\frac{dp_2}{\rho}+gz_2$$



$$u=\sqrt{2gh}$$

Torricelli valem

Pitot toru



$$\frac{1}{2}u_1^2+\int\frac{dp_1}{\rho}+gz_1=\frac{1}{2}u_2^2+\int\frac{dp_2}{\rho}+gz_2$$

$$u_2=0$$

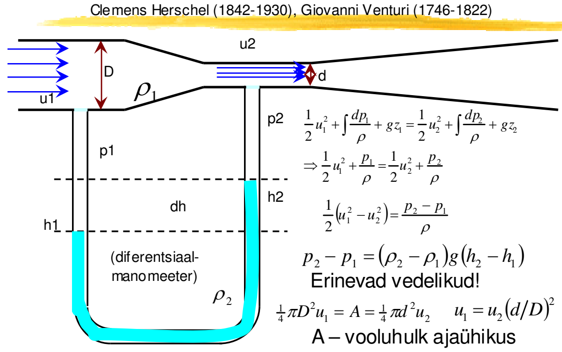
$$\frac{1}{2}u_1^2+\frac{p_1}{\rho}=\frac{p_2}{\rho}$$

$$u_1=\sqrt{\frac{2(p_2-p_1)}{\rho}}$$

$$u_1=\sqrt{2g(h_2-h_1)}$$

Veemõõtja: Venturi toru

Clemens Herschel (1842-1930), Giovanni Venturi (1746-1822)



$$\frac{1}{2}u_1^2+\int\frac{dp_1}{\rho}+gz_1=\frac{1}{2}u_2^2+\int\frac{dp_2}{\rho}+gz_2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}u_1^2+\frac{p_1}{\rho}=\frac{1}{2}u_2^2+\frac{p_2}{\rho}$$

$$\frac{1}{2}\left(u_1^2-u_2^2\right)=\frac{p_2-p_1}{\rho}$$

$$p_2-p_1=(\rho_2-\rho_1)g(h_2-h_1)$$

Erinevad vedelikud!

$$\tfrac{1}{4}\pi D^2 u_1=A=\tfrac{1}{4}\pi d^2 u_2 \qquad u_1=u_2(d/D)^2$$

A – vooluhulk ajaühikus

Elementaarne lainemehaanika

Pinnalainete rajaülesande seade ja lahendamine

- Lainetus: ilmselt mittestatsionaarne
- kuid pöörisevaba?

Pöörisevaba liikumine: pidevuse võrrand lihtsustub

(massi jäävuse seadus pideva keha mehaanikas)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{u})=0 \qquad \rho=const \quad \operatorname{div}\vec{u}=0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

Leidub funktsioon φ(x,y,z,t) nõnda, et $\vec{u}=\vec{\nabla}\phi$

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad v=\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad w=\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

DEF: φ(x,y,z,t) – kiiruse potentsiaal

Laplace'i võrrand

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\overset{def}{=}\Delta\phi=0$$

Mittestatsionaarne pöörisevaba voolamine

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\nabla B=\vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})$$

$$B=\frac{1}{2}|\vec{u}|^2+\int\frac{dp}{\rho}+gz$$

$$\nabla\times\vec{u}=0 \qquad \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\neq 0$$

$$\Rightarrow \vec{u}=\nabla\phi$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\nabla B=\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi+\nabla B=\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+B\right)=0$$

(lained on üldiselt mittestatsionaarsed)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+B\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+B\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+B\right)=0 \Rightarrow \partial\phi/\partial t+B=F(t)$$

ei sõltu ruumikoordinaatidest x,y,z; sõltub ainult ajast t

$$\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\vec{u}|^2+\int\frac{dp}{\rho}+gz=F(t)$$

Bernoulli võrrand mittestats. & pöörisevaba voolamise jaoks

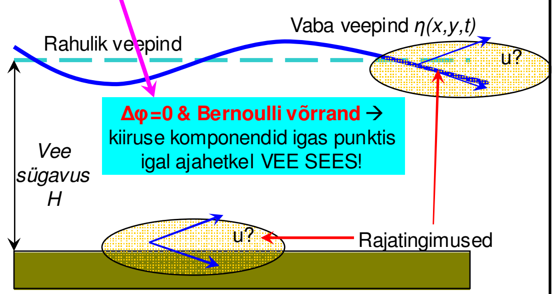
$$\rho=const$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\vec{u}|^2+\frac{p}{\rho}+gz=F(t)$$

Klassikalises pinnalainete teoorias vaadeldakse liikumisi / keskkonda, mis on:

- Pidev keskkond, kus kehtivad Newtoni seadus ja massi jäävuse seadus
- Cauchy võrrandid lihtsustatakse (Newtoni vedelik, olekuvõrrandid) → Navier-Stokesi võrrandid
- Kokkusurumatu (heli ei levi)
- Konstantse tihedusega (pidevuse võrrand lihtsam)
- Hõõrdevaba (→ Euleri võrrandid)
- Barotroopne – tihedus sõltub vaid rõhust → Bernoulli võrrand
- Pöörisevaba (eksisteerib kiiruse potentsiaal, Bernoulli funktsioon sõltub ainult ajast, pidevuse võrrand taandub Laplace'i võrrandiks)
- Mittestatsionaarne liikumine

Pöörisevaba, hõõrdevaba .... jne. vee liikumine meres



Ülesanne: leida kiiruse potentsiaal igal hetkel igas vee punktis

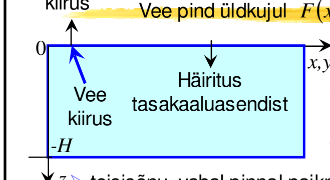
Mõned märkused

- Kaks jõudu: gravitatsioonijõud + pindpinevusjõud
- Pindpinevust tuletuskäikudes siiski ei arvesta
- Coriolisi jõudu samuti ei arvesta
- Kui funktsioon φ on teada, saame Bernoulli võrrandist arvutada rõhu mistahes veemassi punktis
- Laplace'i võrrandil üldiselt pole lainekujulisi lahendeid → ülesanne
- Seega tekivad (pinna)lained vaid vaba veepinna olemasolu tõttu!!!
- Pöörisevabad on vaid väikesed lained

Kinemaatiline rajatingimus

Veepinna muutumise kiirus

Vee pind üldkujul $F(x,y,z,t)=z-\eta(x,y,t)=0$



Veepinna muutumise kiirus == pinnal paikneva veeosakese liikumise kiirus

- teisisõnu, vabal pinnal paiknevad osakesed ei sukeldu

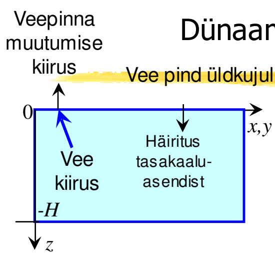
$$w=\frac{Dz}{Dt}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+u\frac{\partial\eta}{\partial x}+v\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

Väikeste veepinna kallete korral võib ära jätta

- Kõval rajapinnal (põhjas) paiknevad osakesed liiguvad piki kõva rajapinda (põhja)

$$w=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-H}=0$$

Dünaamiline rajatingimus



Vee pind üldkujul $F(x,y,z,t)=z-\eta(x,y,t)=0$

- Kinemaatilises rajatingimuses vee pind määramatu
- Peamine probleem vaba pinnaga ülesannetes: raja paiknemise määratlemine
- Loogiline nõue: rõhk vabal pinnal peab olema kõikjal sama
- Pöörisevabade liikumiste puhul saame kasutada Bernoulli võrrandit – mis kehtib kogu veega täidetud alas, seega ka vabal rajal

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\vec u|^2+\frac{p}{\rho}+gz=F(t)}$$

Väikesed lained → väikesed kiirused $\boxed{|\vec u|^2 \ll 1}$

= ülesande lineariseerimine

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\vec u|^2+\frac{p}{\rho}+gz=F(t)} \qquad \boxed{\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{p}{\rho}+gz=F(t)}$$

(1) F(t)→potentsiaali hulka

(2) Atmosfääri rõhk eraldi veemasside rõhust

(Lihtsalt mugavusest)

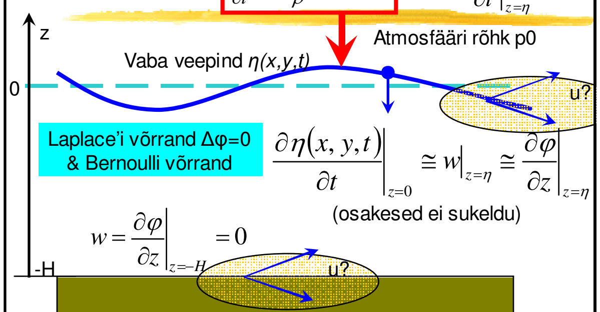
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi+\int F(t)dt+\frac{p_0}{\rho}t\right)+\frac{p-p_0}{\rho}+gz=0}$$

$$\tilde\phi=\phi+\int F(t)dt+\frac{p_0}{\rho}t \qquad \boxed{\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{p-p_0}{\rho}+gz=0}$$

Rajatingimused

Bernoulli funktsioon pinnal

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{p-p_0}{\rho}+gz=0} \qquad g\eta+\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=\eta}=0$$



$$\left.\frac{\partial\eta(x,y,t)}{\partial t}\right|_{z=0}\cong w|_{z=\eta}\cong\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=\eta}$$

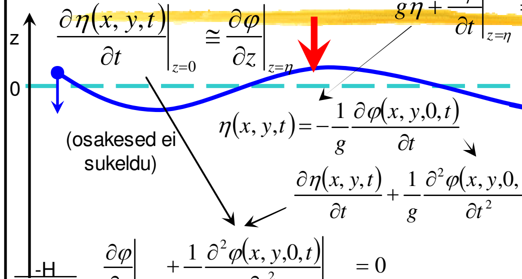
(osakesed ei sukeldu)

$$w=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-H}=0$$

Rajatingimus pinnal: lihtsustamine

Bernoulli võrrand pinnal (kuna atmosfääri rõhk p=p0)

$$g\eta+\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=\eta}=0$$



$$\left.\frac{\partial\eta(x,y,t)}{\partial t}\right|_{z=0}\cong\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=\eta}$$

(osakesed ei sukeldu)

$$\eta(x,y,t)=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(x,y,0,t)}{\partial t}$$

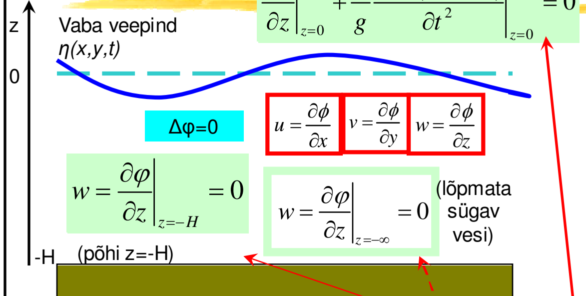
$$\frac{\partial\eta(x,y,t)}{\partial t}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi(x,y,0,t)}{\partial t^2}=0$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}+\frac{1}{g}\left.\frac{\partial^2\varphi(x,y,0,t)}{\partial t^2}\right|_{z=0}=0$$

Teisenduste mõte: elimineerida ülesandest tundmatu funktsioon n – veepinna kuju

Vee liikumise võrrand + rajatingimused

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}+\frac{1}{g}\left.\frac{\partial^2\varphi(x,y,0,t)}{\partial t^2}\right|_{z=0}=0$$



$$\boxed{u=\frac{\partial\phi}{\partial x}}\ \boxed{v=\frac{\partial\phi}{\partial y}}\ \boxed{w=\frac{\partial\phi}{\partial z}}$$

$$w=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-H}=0 \qquad w=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-\infty}=0$$

(lõpmata sügav vesi)

Eeldused rajatingimuste juures

- Vee pinnal atmosfäärirõhk
- Vaba vee pinna liikumine väike
- (→1) rajatingimuse tohib formuleerida rahuliku veepinna kõrgusel z=0
- (→2) Bernoulli võrrandis kiiruse ruut on väike teiste liikmetega võrreldes
- Pinnal asuvad veeosakesed ei sukeldu → veeosakeste vertikaalkiirus = pinna vertikaalkiirus
- Põhi jäik ja liikumatu → vertikaalkiirus null
- Väga sügavas vees: vertikaalkiirus väga väike

Lainete matemaatika I: Laplace'i võrrand ja muutujate eraldamine

$\Delta\varphi=0$

Lahendit otsitakse kujul $\varphi = f(z)\sin(kx+ly-\omega t)$
(muutujate eraldamise meetod)

$$f''(z)\sin(kx+ly-\omega t)-(k^2+l^2)f(z)\sin(kx+ly-\omega t)=0$$

$$f(z)=C_1\exp\left(z\sqrt{k^2+l^2}\right)+C_2\exp\left(-z\sqrt{k^2+l^2}\right) \qquad \sqrt{k^2+l^2}=\kappa$$

$$f(z)=C_1e^{\kappa z}+C_2e^{-\kappa z}$$

NB! Pole üldse oluline, et x,y sõltuvus oleks siinusekujuline → ülesanne

- Lainete vertikaalne struktuur ~eksponent sügavusest
- Konstandid C1, C2: rajatingimustest

$$w=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-\infty}=0$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}+\frac{1}{g}\left.\frac{\partial^2\varphi(x,y,0,t)}{\partial t^2}\right|_{z=0}=0 \qquad w=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-H}=0$$

Lainete matemaatika II: rajatingimused

$$f(z)=C_1e^{\kappa z}+C_2e^{-\kappa z}$$

Võrrandi üldlahend $\kappa=\sqrt{k^2+l^2}$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}+\frac{1}{g}\left.\frac{\partial^2\varphi(x,y,0,t)}{\partial t^2}\right|_{z=0}=0$$

$$\varphi=f(z)\sin(kx+ly+\omega t)$$

$$\varphi_z=f'(z)\sin(kx+ly+\omega t)$$

$$\varphi_{tt}=-\omega^2f(z)\sin(kx+ly+\omega t)$$

$$\left[(C_1-C_2)\kappa-\frac{1}{g}\omega^2(C_1+C_2)\right]\times$$

$$\times\sin\cancel{(kx+ly+\omega t)}=0$$

Lõplik sügavus

$$w=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-H}=0$$

$$C_1e^{-\kappa H}-C_2e^{\kappa H}=0$$

Väga sügav meri

$$w=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-\infty}=0$$

$$f'(z)=\kappa\left(C_1e^{\kappa z}-C_2e^{-\kappa z}\right)$$

$$C_1-C_2\cdot\infty=0\Rightarrow C_2=0$$

Lainete matemaatika III: kas lahend on olemas?

$$\varphi=f(z)\sin(kx+ly+\omega t)$$

$$f(z)=C_1e^{\kappa z}+C_2e^{-\kappa z}$$

$$C_1(\omega^2-g\kappa)+C_2(\omega^2+g\kappa)=0$$

$$C_1e^{-\kappa H}-C_2e^{\kappa H}=0 \quad \text{või} \quad C_2=0$$

(realistlik meri) (väga sügav – põhjatu - meri)

2. järku homogeenne võrrandisüsteem: lahend vaid siis, kui determinant=0

$$\omega=\sqrt{g\kappa}$$

dispersiooniseos

$$(\omega^2-g\kappa)\exp(\kappa H)+$$
$$+(\omega^2+g\kappa)\exp(-\kappa H)=0$$

$$\omega^2=g\kappa\frac{\exp(\kappa H)-\exp(-\kappa H)}{\exp(\kappa H)+\exp(-\kappa H)}=g\kappa\tanh(\kappa H)$$

$$\omega=\sqrt{g\kappa\tanh(\kappa H)}$$

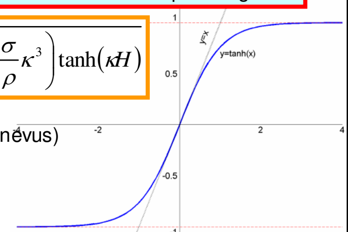
Dispersiooniseose päritolu ehk valikute puudumine

Dispersiooniseos: rajaülesande lahenduvuse tingimus ehk KÕIK selle klassi lained rahuldavad seda

Füüsikaline mõte: laine parameetreid ei saa valida vabalt; laine periood/sagedus on määratud lainepikkusega

$$\omega(\vec\kappa)=\omega(k,l)=\sqrt{\left(g\kappa+\frac{\sigma}{\rho}\kappa^3\right)\tanh(\kappa H)}$$

$\kappa=\sqrt{k^2+l^2}$ (incl. pindpinevus)



$$C_1(\omega^2-g\kappa)+C_2(\omega^2+g\kappa)=0 \qquad f(z)=C_1e^{\kappa z}+C_2e^{-\kappa z}$$

$$C_1e^{-\kappa H}-C_2e^{\kappa H}=0 \;\text{ või }\; C_2=0 \qquad \varphi=f(z)\sin(kx+ly+\omega t)$$

$\omega=\sqrt{g\kappa\tanh(\kappa H)}$ $\omega=\sqrt{g\kappa}$ Kus peitub laine kõrgus?

Bernoulli võrrand pinnal
(kuna atmosfääri rõhk p=p0)

$$g\eta+\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=\eta}=0 \qquad \eta(x,y,t)=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(x,y,0,t)}{\partial t}$$

Veepinna kuju

$$\varphi=C_1e^{z\kappa}\sin(kx+ly+\omega t)$$

$$\eta(x,t)=\frac{C_1\omega}{g}\cos(kx+ly+\omega t)$$

a $\qquad C_1=\dfrac{ag}{\omega}$

(realistlik meri)

$$f(z)=\frac{ag}{\omega}\frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH}$$

$$\varphi=\frac{ag}{\omega}\frac{\cosh\kappa(z+H)}{\cosh\kappa H}\times$$
$$\times\sin(kx+ly+\omega t)$$

$$\varphi=\frac{ag}{\omega}e^{\kappa z}\sin(kx+ly+\omega t)$$

Potentsiaal sügavas vees

Lainete perioodid/sagedused pole juhuslikud! $\eta=a\sin(kx+ly+\omega t)$

Enamasti on lainete periood/sagedus ja pikkus (ka levikusuund) omavahel seotud!

Lineaarses lähenduses amplituud pole seotud laine muude omadustega!

DEFINITSIOON

DISPERSIOONISEOS on seos lainete leviku suuna ja pikkuse ning lainete perioodi või sageduse vahel

$$\omega=\omega(k,l)$$

siselained

$$\omega^2=N_0^2\frac{k_1^2+k_2^2}{k_1^2+k_2^2+n^2}$$

Rossby lained

$$\omega(k,l)=\frac{-k}{k^2+l^2+a_R^2}$$

mittelineaarne Schrödingeri võrrand

$$\omega(\vec\kappa)=|\kappa|^\alpha$$

Lainete matemaatika: tehtud lihtsustused

- Laine kuju: siinus / koosinus (selline eeldus tegelikult pole vajalik)
- Amplituud/kõrgus väike võrreldes nii lainepikkuse kui vee sügavusega
- Viskoossus ja pindpinevus hüljatud
- Coriolise jõud hüljatud
- Merepõhi sile
- Lõpmatu meri (ei mingeid randasid)
- Lained 1-mõõtmelised (s.o. lõpmata pikad sirged laineharjad)

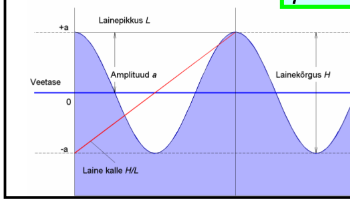
Lainete parameetrid valemites

Pinnalainete potentsiaal $\varphi = f(z)\sin(kx + ly + \omega t)$

Vee kiirus avaldub potentsiaali kaudu $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = w$

Veepinna kuju ⇔ z=0 $\eta = f(0)\sin(kx + ly + \omega t)$

Laine amplituud a=f(0) $\eta = a\sin(kx + ly + \omega t)$

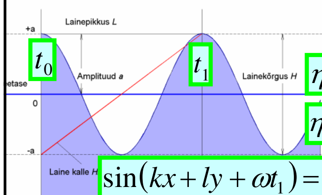


$f(z)$

- kirjeldab, kuidas laine omadused muutuvad sügavuse suurenedes

Valemid ja tegelik elu I: periood

Veepinna kuju $\eta = a\sin(kx + ly + \omega t)$



$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$

$\eta_0 = a\sin(kx + ly + \omega t_0)$

$\eta_1 = a\sin(kx + ly + \omega t_1)$

$\sin(kx + ly + \omega t_1) = \sin(kx + ly + \omega t_0 + 2\pi)$

Laine periood - ajaintervall kahe järjestikuse laineharja vahel

$\omega t_1 = \omega t_0 + 2\pi$

$t_1 = t_0 + \frac{2\pi}{\omega}$

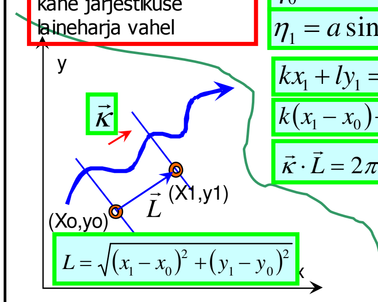
$T = t_1 - t_0 = \frac{2\pi}{\omega}$

Valemid ja tegelik elu II: lainepikkus

Laine pikkus - vahemaa kahe järjestikuse laineharja vahel

$\eta_0 = a\sin(kx_0 + ly_0 + \omega t)$

$\eta_1 = a\sin(kx_1 + ly_1 + \omega t)$



$kx_1 + ly_1 = kx_0 + ly_0 + 2\pi$

$k(x_1 - x_0) + l(y_1 - y_0) = 2\pi$

$\vec{\kappa} \cdot \vec{L} = 2\pi$

$\kappa = \sqrt{k^2 + l^2}$

$\vec{\kappa} = (k, l)$

$\kappa L \cos(\vec{\kappa}, \vec{L}) = 2\pi$

$L = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

$L = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 + l^2}}$

Lainevektor ja miks seda vaja on

DEFINITSIOON

LAINEVEKTOR on selline vektor, mis on suunatud laine leviku suunas ning mille pikkus on 2π/lainepikkus

LAINEARV on lainevektori pikkus

Lainete sageduse analoog

$\eta = a\sin(kx + ly + \omega t)$

Laine periood T= 2π/ω

Laine sagedus f=1/T= ω/2π

Laine pikkus L= 2π/κ

Lainearv κ = 2π/L

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

2π on vajalik seetõttu, et sin ja cos periood on 2π

$L = \frac{2\pi}{|\vec{\kappa}|} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 + l^2}}$

Probleemid ühikutega

Laine periood T= 2π/ω [sekund]

Laine sagedus f=1/T= ω/2π [1/sekund]

Laine (ring)sagedus ω=2πf [radiaan/sekund]

2π on vajalik ainult seetõttu, et sin ja cos periood on 2π [radiaani]

π [radiaani] = 180°

Laine pikkus L= 2π/κ [meetrit]

Lainearv κ = 2π/L [radiaan/meeter]