Vektorid ja diferentsiaalvõrrandid

Argumendid ja muutujad rannikumere dünaamika ülesannetes

- Kolm ruumi-koordinaati *(x,y,z)*
- Aeg *t*
- → *F(x,y,z,t)*

- vee liikumise kiiruse kolm komponenti $\vec{u} = (u, v, w)$
- Rõhk p
- soolsus, temperatuur, → tihedus
- peavad olema määratud igas punktis igal ajahetkel $u = u(x, y, z, t)$

Vektorarvutus: põhiseosed

$$\vec{u} = (u, v, w) \qquad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$ Vektori pikkus

$$\vec{u} \cdot \vec{b} = ub_x + vb_y + cb_z = |\vec{u}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{u}, \vec{b})$$ Kahe vektori skalaarkorrutis: arv

$$\vec{u} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u & v & w \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} v & w \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} w & u \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u & v \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)$$

Kahe vektori vektorkorrutis: vektor, mis on risti mõlema "teguriga"

$$|\vec{u} \times \vec{b}| = |\vec{u}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{u}, \vec{b})$$ Vektorkorrutise pikkus

Vektorvõrrandid: võrrandisüsteemide kompaktne üleskirjutamise viis

$$\vec{u} = \nabla\phi \quad \begin{cases} u = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ v = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ w = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{cases}$$

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + B\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + B\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + B\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + B\right) = 0$$

Gradient

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$ Kolme muutujaga skalaarfunktsiooni gradient: osatuletiste vektor

Osutab alati kiireima muutuse suunas

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$ Nabla ehk gradiendi operaator: mugav üleskirjutus vektorite "keeles"

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (u, v, w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$$ ka $\mathrm{div}\,\vec{u}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ Divergentsivaba (kiirus)väli

$$\nabla \cdot \nabla T = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T = \Delta T$$ Laplace'i operaator

Näide: pidevuse võrrand

tihedus → $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{u}) = 0$ ← aeg

Vee kiirus $\vec{u} = (u, v, w)$

Erijuht: vee (õhu) tihedus on konstantne

$$\rho(x, y, z, t) = const \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad \mathrm{div}(\rho\vec{u}) = \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u}$$

Võrrand lihtsustub kujule $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{u} = 0}$ $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0}$

Pööris

$$\vec{\nabla}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u & v & w\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ v & w\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x}\\ w & u\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ u & v\end{vmatrix}\right)$$

- Gradientvektori ja välja vektorkorrutis
- Iseloomustab liikumise lokaalset pöörlemist

Näide: tasaparalleelne voolamine $\vec{u}=(const,0,0)$

$\nabla\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{u})\equiv 0$ Kehtib alati: mingi vektorvälja pööris on alati divergentsivaba

$\vec{\nabla}\times\vec{u}=\vec{0}\Leftrightarrow u=\nabla\varphi$ Pöörisevaba voolamine – alati eksisteerib kiiruse potentsiaal

Kiiruse potentsiaal

Funktsioon, mille osatuletised on võrdsed kiiruse komponentide väärtustega

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\qquad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\qquad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\qquad \varphi=\varphi(x,y,z)$$

Näide: tasaparalleelne voolamine $\vec{u}=(const,0,0)$

$\vec{\nabla}\times\vec{u}=\vec{0}\Leftrightarrow u=\nabla\varphi$

Pöörisevaba voolamine – alati eksisteerib kiiruse potentsiaal!

Liitfunktsiooni diferentseerimine

- $\gamma=\gamma[x(t),y(t),z(t),t]$
- Näiteks veeosakese temperatuur, mis üldiselt muutub nii veeosakese liikumise tõttu ühest punktist teise kui ka muudel põhjustel – näiteks soojenemine
- Omaduse muutumine ajas: liitfunksiooni difererentseerimise reegli järgi:

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial\gamma}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

Lihtsad diferentsiaalvõrrandid

$f'=a\Rightarrow f=ax+C$

$f'=af\Rightarrow f=Ce^{ax}$

Esimest järku – üldlahendis üks suvaline konstant

Järk N – üldlahendis N suvalist konstanti

$$f''=a\Rightarrow f=\frac{1}{2}ax^2+C_1x+C_2$$

$$f''+\omega^2 f=0\Rightarrow f=C_1\sin\omega x+C_2\cos\omega x$$

$$f''-\omega^2 f=0\Rightarrow f=C_1e^{\omega x}+C_2e^{-\omega x}$$

Lineaarsed võrrandisüsteemid

$ax+by=p$
$cx+dy=q$

Lahendub alati, kui determinant pole null (lõikuvad sirged); üks lahend

$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$

$ax+by=0$
$cx+dy=0$

Lahendub ainult siis, kui determinant=0; lõpmata palju lahendeid (kattuvad sirged)